



# Particules Gaussiennes deterministes en Maximum de vraisemblance Non-lineaire : Application au Filtrage Optimal des Signaux Radar et GPS

Anis Ziadi

## ► To cite this version:

Anis Ziadi. Particules Gaussiennes deterministes en Maximum de vraisemblance Non-lineaire : Application au Filtrage Optimal des Signaux Radar et GPS. Automatique. Universite Toulouse III Paul Sabatier, 2007. Français. <tel-01150472>

**HAL Id: tel-01150472**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01150472>**

Submitted on 11 May 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° ordre : ---- - Année 2007

# Thèse

Présentée au

**Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS**

En vue de l'obtention du titre de

**DOCTEUR de l'Université de TOULOUSE  
délivré par l'Université de Paul Sabatier**

Spécialité : Automatique et Traitement du Signal

Par

**Anis Ziadi**

---

## **PARTICULES GAUSSIENNES DETERMINISTES EN MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE NON-LINEAIRE: APPLICATION AU FILTRAGE OPTIMAL DES SIGNAUX RADAR ET GPS**

---

Commission d'examen :

<b>Y. DEVILLE</b>	Examineur
<b>J-P. LE CADRE</b>	Rapporteur
<b>E. MOULINES</b>	Rapporteur
<b>D. MULLER</b>	Examineur
<b>C. MUSSO</b>	Examineur
<b>G. SALUT</b>	Directeur de thèse

Invités :

<b>O. DUGAST</b>	DGA
<b>G. MAYNARD DE LA VALETTE</b>	DGA



# **Particules Gaussiennes Déterministes en Maximum de Vraisemblance Non-linéaire :**

**Application au Filtrage Optimal des  
Signaux Radar et GPS**

M.A. Ziadi





*A mes parents ...*



# Avant Propos

En préambule aux travaux présentés, je voudrais remercier les personnes ayant pris une part active dans l'élaboration ou l'examen de ce manuscrit.

Mes premiers remerciements s'adressent à Gérard Salut, directeur de recherche au CNRS, pour avoir dirigé mes travaux de thèse. Ses connaissances et sa vision scientifiques m'ont beaucoup apporté.

Je tiens également à remercier Messieurs Yannick Deville, Daniel Muller et Christian Musso qui m'ont fait l'honneur de participer à ce jury, et particulièrement les rapporteurs Messieurs Jean-Pierre Le Cadre et Eric Moulines d'avoir bien voulu évaluer ce travail.

Je remercie l'ensemble du groupe MRS pour le support matériel dont j'ai pu bénéficier tout au long de cette thèse.

Une grande pensée à tous mes proches pour leurs encouragements dans les moments de doute.

Je salue très chaleureusement tous mes amis du LAAS et d'ailleurs et plus particulièrement Uriell Filliger pour sa participation active à la finalisation du manuscrit.

Enfin, je remercie le LAAS en la personne de son directeur pour m'avoir accueilli dans des conditions de travail exceptionnelles, mais aussi l'ensemble du personnel pour leur disponibilité et leur gentillesse.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Filtrage non-linéaire et solutions particulières</b>	<b>7</b>
<b>1 Estimation non-linéaire des processus markoviens</b>	<b>11</b>
1 Introduction . . . . .	11
2 Position du problème . . . . .	11
3 Estimateur à maximum de vraisemblance trajectorielle . . . . .	12
4 Estimateur à maximum de vraisemblance marginale . . . . .	12
5 Estimateur à minimum de variance . . . . .	12
6 Équations générales du filtrage . . . . .	13
6-1 Prédiction markovienne . . . . .	13
6-2 Correction bayésienne . . . . .	14
7 Solutions optimales . . . . .	14
7-1 Cas de variables d'état à valeurs discrètes dans un alphabet fini . . . . .	14
7-2 Cas linéaire-gaussien . . . . .	15
7-3 Cas général . . . . .	17
8 Solutions approchées . . . . .	18
8-1 Approches déterministes . . . . .	18
8-1-1 Filtre à grille "fixe" . . . . .	18
8-1-2 Filtre de Kalman étendu (EKF) . . . . .	19
8-1-3 Unscented Kalman Filter (UKF) . . . . .	20
8-1-4 Interactive multiple model (IMM) . . . . .	22
8-1-5 Somme de gaussiennes . . . . .	24
8-1-6 Filtre à particules déterministes . . . . .	25
8-2 Approches aléatoires . . . . .	26
8-2-1 Approximation par somme stochastique de Riemann . . . . .	26
8-2-2 Méthodes purement Monte-Carlo . . . . .	27
8-2-3 Filtre à particules aléatoires . . . . .	28
9 Filtre à particules aléatoires interactives . . . . .	29
9-1 Introduction . . . . .	29
9-2 Principes du Filtre particulaire aléatoire . . . . .	29
9-3 Équations du filtre particulaire aléatoire . . . . .	30
9-4 Algorithme du Filtre Particulaire aléatoire . . . . .	31
9-5 Densités élémentaires en filtrage particulaire . . . . .	32
9-5-1 Particules de Dirac . . . . .	32
9-5-2 Particules de Dirac-Gauss . . . . .	33
9-5-3 Particules de Gauss . . . . .	35
9-6 Redistribution de particules . . . . .	37
9-6-1 Dégénérescence du support particulaire . . . . .	37
9-6-2 Redistribution en loi par tirage aléatoire . . . . .	37

9-6-3	Redistribution déterministe à maximum de vraisemblance . . . . .	37
9-6-4	Redistribution déterministe à minimum de variance . . . . .	38
9-6-5	Intermittence des redistributions . . . . .	39
9-7	Extension à l'estimation à maximum de vraisemblance . . . . .	39
9-7-1	Introduction : . . . . .	39
9-7-2	Algorithme particulière aléatoire à maximum de vraisemblance trajectorielle	41
10	Conclusion . . . . .	42
<b>2</b>	<b>Particules déterministes en filtrage non-linéaire</b>	
	<b>à maximum de vraisemblance</b>	<b>43</b>
1	Introduction . . . . .	43
2	Principes du Filtre particulière déterministe . . . . .	44
3	Équations du Filtre Particulaire déterministe . . . . .	45
4	Particules déterministes élémentaires . . . . .	49
4-1	Particules de Gauss . . . . .	49
4-2	Particule de Dirac-Gauss . . . . .	50
4-3	Particule de Dirac . . . . .	52
5	Branchement/Sélection déterministe . . . . .	53
5-1	Branchement déterministe . . . . .	53
5-2	Sélection déterministe à maximum de vraisemblance . . . . .	54
5-3	Intermittence des Branchement/Sélection déterministes . . . . .	55
5-4	Algorithme de Branchement/Sélection déterministe . . . . .	57
6	Interpénétration des particules et exclusions mutuelles . . . . .	57
6-1	Cas de particules diffuses . . . . .	58
6-2	Cas de particules ponctuelles . . . . .	59
6-3	Reconstruction de la densité de probabilité trajectorielle . . . . .	59
6-4	Algorithme d'élimination de l'interpénétration . . . . .	60
7	Mise en œuvre du filtre déterministe à particules gaussiennes . . . . .	60
7-1	Cas des particules de Gauss . . . . .	61
7-2	Cas des particules de Dirac . . . . .	62
7-3	Décomposition des particules gaussiennes mal conditionnées . . . . .	63
7-4	Algorithme de décomposition des particules . . . . .	65
8	Algorithme du Filtre à particules déterministes de Gauss . . . . .	66
9	Convergences du Filtre Particulaire déterministe . . . . .	69
10	Extension à l'estimation à minimum de variance . . . . .	69
11	Conclusion . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Application à la boucle de verrouillage de phase</b>	<b>73</b>
1	Introduction . . . . .	73
2	Modélisation du problème . . . . .	74
3	Solution à particules déterministes de Gauss . . . . .	74
3-1	Phase cohérente . . . . .	74
3-1-1	Linéarisation du modèle d'état . . . . .	75
3-1-2	Algorithme de Poursuite de phase cohérente avec des particules déterministes de Gauss . . . . .	75
3-2	En présence d'incohérence de phase . . . . .	77
4	Résultats numériques . . . . .	77
4-1	Performances en filtrage et Lissage des particules déterministes de Gauss . . . . .	77
4-1-1	Paramètres d'état . . . . .	77
4-1-2	Paramètres du filtre . . . . .	77
4-1-3	Résultats numériques . . . . .	77
4-2	Comparaison à un banc de filtre de Kalman étendu . . . . .	78
4-3	Amélioration des performances par l'exclusion mutuelle des particules . . . . .	80
5	Poursuite conjointe de la phase et de la distance en traitement radiale du signal radar . . . . .	81

6	Conclusion . . . . .	83
4	<b>Conclusion</b>	<b>85</b>
 <b>II Récepteur particulière pour radar de veille/poursuite</b>		<b>87</b>
1	<b>Introduction</b>	<b>89</b>
2	<b>Problématique radar : Introduction et modélisation</b>	<b>91</b>
1	Introduction . . . . .	91
2	Principes des systèmes radar . . . . .	91
2-1	Radar de Veille . . . . .	92
2-2	Radar de Poursuite . . . . .	92
3	Signal Radar . . . . .	92
3-1	Signal Radar à l'émission . . . . .	92
3-1-1	Impulsion rectangulaire . . . . .	92
3-1-2	Compression d'impulsion . . . . .	93
3-1-3	Train d'impulsions . . . . .	94
3-1-4	Agilité de fréquence . . . . .	94
3-2	Signal reçu à l'entrée de l'antenne . . . . .	95
4	Chaîne d'acquisition . . . . .	96
5	Mesures échantillonnées à la réception . . . . .	97
6	Autocorrélation de l'enveloppe du signal . . . . .	98
6-1	Impulsion rectangulaire . . . . .	98
6-2	Impulsion chirp . . . . .	98
7	Mesures angulaires pour les radars de poursuite . . . . .	98
7-1	Monopulse de phase . . . . .	98
7-2	Monopulse d'amplitude . . . . .	100
8	Bilan de puissance . . . . .	100
9	Modélisation du problème . . . . .	101
9-1	Modèle électromagnétique de la cible . . . . .	101
9-1-1	Modèles de Swerling . . . . .	101
9-1-2	Modèle à processus gaussien . . . . .	102
9-2	Modèle dynamique de la cible . . . . .	102
9-3	Modèle d'observation . . . . .	103
10	Traitement du signal . . . . .	103
10-1	Traitement classique . . . . .	103
10-1-1	Détection/Estimation . . . . .	104
10-1-2	Post-traitement des mesures radar . . . . .	104
10-1-3	Poursuite d'une cible . . . . .	104
10-1-3.1	Poursuite en distance . . . . .	104
10-1-3.2	Poursuite angulaire par monopulse . . . . .	105
10-2	Traitement par particules aléatoires . . . . .	105
11	Précision optimale des mesures radar . . . . .	106
11-1	Mesure de la distance . . . . .	106
11-2	Mesure de la vitesse radiale . . . . .	106
12	Conclusion . . . . .	107



<b>3</b>	<b>Récepteur particulaire pour radar de poursuite</b>	<b>109</b>
1	Introduction . . . . .	109
2	Traitement radiale de cible non-fluctuante . . . . .	109
2-1	Modèle d'état . . . . .	110
2-1-1	Équations de dynamique . . . . .	110
2-1-2	Équation de mesure . . . . .	110
2-2	Linéarisation du modèle d'état . . . . .	110
2-3	Algorithme de filtrage . . . . .	111
2-4	Résultats numériques en simulation . . . . .	113
2-4-1	Caractéristiques du Radar . . . . .	113
2-4-2	Caractéristiques de la cible . . . . .	113
2-4-3	Scénario Simulé . . . . .	113
2-4-4	Performances du Filtre . . . . .	114
3	Traitement du scintillement de la cible . . . . .	116
3-1	Caractéristiques de la cible . . . . .	117
3-2	Paramètres cinématiques simulés . . . . .	117
3-3	Fluctuation de la phase seule . . . . .	118
3-3-1	Paramètres électromagnétiques simulés . . . . .	118
3-3-2	Performances du récepteur particulaire . . . . .	119
3-4	Fluctuations de phase et d'amplitude . . . . .	120
3-4-1	Paramètres électromagnétiques simulés . . . . .	120
3-4-2	Performances du récepteur particulaire . . . . .	121
4	Traitement en 3D des mesures Radar . . . . .	124
4-1	Modèle d'état . . . . .	124
4-1-1	Équation de mesures . . . . .	124
4-1-2	Équation de dynamique . . . . .	125
4-1-2.1	Modèle cinématique . . . . .	125
4-1-2.2	Modèle électromagnétique . . . . .	125
4-2	Solution particulaire . . . . .	125
4-3	Résultats numériques . . . . .	126
4-3-1	Caractéristiques du Radar . . . . .	126
4-3-2	Caractéristiques de la cible . . . . .	126
4-3-3	Performances du récepteur particulaire . . . . .	128
5	Conclusion . . . . .	131
<b>4</b>	<b>Traitement de données réelles</b>	<b>133</b>
1	Introduction . . . . .	133
2	Caractéristiques du Radar J11B . . . . .	133
3	Caractéristiques de la cible . . . . .	134
4	Remarques sur les enregistrements et adaptation du Filtre particulaire . . . . .	134
4-1	Validité des récurrences . . . . .	134
4-2	Forme de l'impulsion radar . . . . .	134
4-3	Saut de distance . . . . .	135
5	Prétraitement et bruitage numérique des données . . . . .	136
6	Résultats numériques . . . . .	136
6-1	Traitement de la passe 1 . . . . .	136
6-1-1	Description de la passe . . . . .	136
6-1-2	Performances du récepteur particulaire . . . . .	136
6-2	Traitement de la passe 5 . . . . .	139
6-2-1	Description de la passe . . . . .	139
6-2-2	Performances du récepteur particulaire . . . . .	139
7	Commentaires des performances . . . . .	141
8	Conclusion . . . . .	143

<b>5</b>	<b>Récepteur particulière pour radar de veille-poursuite</b>	<b>145</b>
1	Introduction . . . . .	145
2	Problématique des Radars de veille . . . . .	145
2-1	Fonctionnement des Radars de veille . . . . .	145
2-2	Réception des mesures . . . . .	146
3	Modélisation du problème . . . . .	147
4	Solution particulière . . . . .	148
4-1	Prédiction pure à nombre de particules constant . . . . .	148
4-2	Redistribution déterministe . . . . .	148
4-3	Traitement de l'incohérence de phase . . . . .	148
4-4	Probabilité de détection . . . . .	149
4-5	Algorithme . . . . .	150
5	Application au traitement radial . . . . .	150
5-1	Performances sous $-7\text{ dB}$ . . . . .	151
5-2	Performances sous $-3\text{ dB}$ . . . . .	153
6	Conclusion . . . . .	154
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>155</b>
<b>III</b>	<b>Réception particulière du signal GPS</b>	<b>157</b>
<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>159</b>
<b>2</b>	<b>Problématique GPS : Introduction et modélisation</b>	<b>161</b>
1	Introduction . . . . .	161
2	Description du système GPS . . . . .	161
3	Signal GPS . . . . .	162
3-1	Signal émis . . . . .	162
3-1-1	Codes pseudo-aléatoires . . . . .	163
3-1-2	Message de navigation . . . . .	163
3-1-3	Composantes du signal émis . . . . .	164
3-2	Signal reçu sur l'antenne du récepteur . . . . .	164
3-3	Pré-traitement analogique du signal GPS . . . . .	165
3-4	Bilan de puissance . . . . .	165
4	Mesures GPS . . . . .	165
4-1	Mesure de pseudo-distance . . . . .	166
4-2	Mesure de phase . . . . .	166
4-3	Combinaison des Mesures . . . . .	166
4-3-1	Combinaison des phases . . . . .	166
4-3-2	Combinaison de pseudo-distance et de phase . . . . .	167
5	Traitement numérique classique du signal GPS . . . . .	167
5-1	Acquisition du signal . . . . .	167
5-1-1	Recherche linéaire . . . . .	167
5-1-2	Recherche par TFR . . . . .	167
5-2	Poursuite du signal . . . . .	167
5-2-1	Boucle de verrouillage de code (DLL) . . . . .	168
5-2-2	Boucles de verrouillage de la porteuse (PLL/FLL) . . . . .	168
5-2-2.1	Boucle de verrouillage de phase . . . . .	168
5-2-2.2	Boucle de verrouillage de fréquence . . . . .	169
5-3	Synchronisation des bits de données . . . . .	169
6	Solutions particulières . . . . .	170
7	Modélisation du problème GPS . . . . .	171
7-1	Modèle d'observation . . . . .	171
7-1-1	Corrélation par le code C/A . . . . .	171

7-1-2	Corrélation par le chip . . . . .	172
7-2	Modèle de dynamique . . . . .	174
7-2-1	Paramètres continus . . . . .	174
7-2-2	Paramètres discrets . . . . .	174
7-2-2.1	Code PRN . . . . .	174
7-2-2.2	Message de navigation . . . . .	174
8	Conclusion . . . . .	175
<b>3</b>	<b>Récepteur particulaire en poursuite GPS</b>	<b>177</b>
1	Introduction . . . . .	177
2	Modèle d'état . . . . .	177
3	Solutions Particulaires . . . . .	178
3-1	Discretisation particulaire de l'espace d'état . . . . .	178
3-2	Récepteur à particules aléatoires de Dirac-Gauss . . . . .	179
3-3	Récepteur à particules Déterministes de Dirac-Gauss . . . . .	180
3-3-1	Décodage du message de navigation . . . . .	181
4	Résultats numériques . . . . .	181
4-1	Conditions opératoires . . . . .	181
4-2	Simulations des mesures . . . . .	182
4-3	Performances du filtre particulaire de Dirac-Gauss . . . . .	184
4-3-1	Rapport S/B de 7 à 10 dB . . . . .	185
4-3-2	Rapport S/B de -3 à 0 dB . . . . .	190
4-3-3	Rapports S/B plus faibles . . . . .	195
5	Conclusion . . . . .	197
<b>4</b>	<b>Réception particulaire en acquisition/poursuite du signal GPS : Architecture Chip à Chip</b>	<b>199</b>
1	Introduction . . . . .	199
2	Filtre adapté au chip élémentaire . . . . .	199
3	Modèle d'état . . . . .	200
3-1	Modèle d'observation . . . . .	200
3-2	Modèle dynamique . . . . .	200
4	Solution Particulaire . . . . .	201
4-1	Discretisation particulaire de l'espace d'état . . . . .	201
4-2	Algorithme de filtrage . . . . .	201
5	Résultats numériques . . . . .	201
5-1	Simulations des mesures . . . . .	201
5-2	Performances du filtre particulaire . . . . .	203
5-2-1	Rapport S/B de -30 dB . . . . .	203
5-2-2	Rapport S/B de -36.5 dB . . . . .	206
6	Conclusion . . . . .	209
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>211</b>
	<b>Conclusion générale</b>	<b>213</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>217</b>

# Table des figures

I.1.1	Exemple de particules de Dirac-Gauss . . . . .	33
I.2.1	Etape du filtre particulaire déterministe (Cas de particules de Dirac) . . . . .	44
I.2.2	Redondance des branchements successifs sous faible observabilité . . . . .	56
I.2.3	Intermittence des Branchement/Sélection. . . . .	56
I.2.4	Évolution de particules interpénétrantes . . . . .	58
I.2.5	Détection des particules interpénétrantes . . . . .	58
I.2.6	Détection des particules interpénétrantes . . . . .	59
I.2.7	Décomposition d'une particule gaussienne . . . . .	64
I.2.8	Organigramme du filtre particulaire . . . . .	68
I.2.9	Comparaison des critères de sélection dans un cas scalaire bimodal . . . . .	71
I.3.1	Performances des particules déterministes gaussiennes pour le filtrage et le lissage en verouillage de phase sous $-10\text{ dB}$ . . . . .	78
I.3.2	Comparaisons des performances temps-réel et trajectorielles des particules déterministes de Gauss à celles d'un banc de FKE parallèles sous $-10\text{ dB}$ . . . . .	79
I.3.3	Amélioration de la stabilité du filtre particulaire et réduction du nombre de particules par l'exclusion mutuelle ( $RSB = -10\text{ dB}$ ). . . . .	81
I.3.4	Performances de différentes versions du filtre particulaire déterministes dans le traitement des mesures radiales d'un radar de poursuite ( $RSB \in [0, 5\text{ dB}]$ ). . . . .	83
II.2.1	Impulsion rectangulaire . . . . .	93
II.2.2	Compression d'impulsion par modulation en fréquence . . . . .	94
II.2.3	Schéma bloc du radar . . . . .	96
II.2.4	Monopulse de phase simplifié . . . . .	99
II.2.5	Modèle de Singer modifié . . . . .	102
II.3.1	Chaîne de traitement des données brutes à la sortie du filtre adapté . . . . .	109
II.3.2	Simulation des paramètres électromagnétiques et cinématiques de la cible (cas radial sans fluctuation) . . . . .	113
II.3.3	Simulation des paramètres électromagnétiques et cinématiques de la cible (cas radial sans fluctuation) . . . . .	114
II.3.4	Performances du filtre particulaire : Estimation des paramètres d'état d'une cible radiale non-fluctuante . . . . .	114
II.3.5	Performances du filtre particulaire : Estimation des paramètres d'état d'une cible radiale non-fluctuante . . . . .	115
II.3.6	Simulation des paramètres cinématiques de la cible (cas radial avec fluctuation de phase et fluctuation de phase/amplitude) . . . . .	117
II.3.7	Simulation des paramètres électromagnétiques de la cible . . . . .	118
II.3.8	Rapport Signal/Bruit . . . . .	118
II.3.9	Performances du filtre particulaire : Cible radiale avec fluctuation de la phase . . . . .	119

II.3.10	Performances du filtre particulaire : Cible radiale avec fluctuation de la phase . . . . .	120
II.3.11	Simulation des paramètres électromagnétiques de la cible (avec fluctuations de phase et d'amplitude) . . . . .	120
II.3.12	Rapport Signal/Bruit . . . . .	121
II.3.13	Performances du filtre particulaire : Probabilité de détection de la cible (radiale avec fluctuations de phase et d'amplitude) . . . . .	121
II.3.14	Performances du filtre particulaire : Estimation des paramètres d'état d'une cible fluctuante en phase et amplitude . . . . .	122
II.3.15	Performances du filtre particulaire : Estimation des paramètres d'état d'une cible fluctuante en phase et amplitude . . . . .	123
II.3.16	Diagrammes d'antenne . . . . .	126
II.3.17	Evolution cartésienne de la cible . . . . .	127
II.3.18	Evolution polaire de la cible . . . . .	127
II.3.19	Evolution polaire de la cible . . . . .	128
II.3.20	Evolution de la rétrodiffusion de la cible . . . . .	128
II.3.21	Rapport Signal/Bruit . . . . .	129
II.3.22	Performances du filtre particulaire : Traitement 3D des mesures . . . . .	129
II.3.23	Performances du filtre particulaire : Traitement 3D des mesures . . . . .	130
II.3.24	Performances du filtre particulaire : Traitement 3D des mesures . . . . .	131
II.4.1	Récurrence valide et invalide du J11 signal enregistré . . . . .	134
II.4.2	Saut de distance observé par le filtrage particulaire et l'évolution de la case distance de la cible . . . . .	135
II.4.3	Impulsions reçues au voisinage d'un saut de distance . . . . .	135
II.4.4	Performances particulières : Passe 1 . . . . .	137
II.4.5	Performances particulières : Passe 1 (Suite) . . . . .	138
II.4.6	Performances particulières : Passe 5 . . . . .	139
II.4.7	Performances particulières : Passe 5 (Suite) . . . . .	140
II.4.8	Performances particulières : Passe 5 (Suite) . . . . .	141
II.4.9	Performances particulières : Passe 5 (modification des paramètres du modèle) . . . . .	142
II.4.10	Performances particulières : Passe 5 (modification des paramètres du modèle) (Suite) . . . . .	143
II.5.1	Trajectoire réelle de la cible ( $ \delta\gamma  \leq 4g$ , par seconde) . . . . .	151
II.5.2	Performances du récepteur particulaire de veille-poursuite sous S/B de -7 dB . . . . .	152
II.5.3	Performances du récepteur particulaire sous S/B de -3 dB . . . . .	153
II.5.4	Performances du récepteur particulaire sous S/B de -3 dB . . . . .	154
III.2.1	Signal GPS . . . . .	163
III.2.2	Fonction de corrélation en fonction de la fréquence résiduelle. . . . .	173
III.3.1	Simulation des paramètres d'état du problème GPS . . . . .	183
III.3.2	Fréquence résiduelle du signal démodulé . . . . .	184
III.3.3	Rapport S/B . . . . .	184
III.3.4	Probabilité de détection . . . . .	185
III.3.5	Estimation de l'amplitude du signal . . . . .	186
III.3.6	Estimation de la pseudo-distance . . . . .	186
III.3.7	Estimation de la vitesse radiale . . . . .	187
III.3.8	Estimation de la fréquence Doppler . . . . .	188
III.3.9	Poursuite des commandes d'accélération . . . . .	188
III.3.10	Détection des bits du message de navigation . . . . .	189
III.3.11	Fréquence résiduelle . . . . .	190
III.3.12	Rapport S/B . . . . .	190
III.3.13	Probabilité de détection . . . . .	191
III.3.14	Estimation de l'amplitude du signal . . . . .	191

---

III.3.15	Poursuite de la pseudo-distance . . . . .	192
III.3.16	Poursuite de la vitesse radiale . . . . .	192
III.3.17	Poursuite des commandes d'accélération . . . . .	193
III.3.18	Poursuite de la fréquence Doppler . . . . .	193
III.3.19	Détection des bits du message de navigation . . . . .	194
III.3.20	Fréquence résiduelle . . . . .	195
III.3.21	Rapport S/B . . . . .	195
III.3.22	Poursuite des commandes d'accélération . . . . .	196
III.3.23	Poursuite de la vitesse radiale . . . . .	196
III.3.24	Poursuite de la pseudo-distance . . . . .	197
III.3.25	Poursuite de la fréquence Doppler . . . . .	197
III.4.1	Simulation des paramètres d'état du problème GPS . . . . .	202
III.4.2	Probabilité de détection . . . . .	203
III.4.3	Estimation de l'amplitude du signal . . . . .	203
III.4.4	Poursuite de la pseudo-distance . . . . .	204
III.4.5	Poursuite de la vitesse radiale . . . . .	204
III.4.6	Poursuite des commandes d'accélération . . . . .	204
III.4.7	Poursuite de la fréquence Doppler . . . . .	205
III.4.8	Détection des bits du message de navigation . . . . .	205
III.4.9	Probabilité de détection . . . . .	206
III.4.10	Estimation de l'amplitude du signal . . . . .	206
III.4.11	Poursuite de la pseudo-distance . . . . .	207
III.4.12	Poursuite de la vitesse radiale . . . . .	207
III.4.13	Poursuite des commandes d'accélération . . . . .	207
III.4.14	Poursuite de la fréquence Doppler . . . . .	208
III.4.15	Détection des bits du message de navigation . . . . .	208



# Abbreviations

<b>B/S</b>	Branchement/Sélection.
<b>CI</b>	Compression d’Impulsion.
<b>DGP</b>	Deterministic Gaussian Particles (Particules Déterministes de Gauss).
<b>EKF</b>	Extended Kalman Filter.
<b>FKE</b>	Filtre de Kalman Étendu.
<b>GPS</b>	Global Positionning System.
<b>IMM</b>	Interactive Multiple Model.
<b>LLE</b>	Lisseur Linéaire-gaussien Étendu.
<b>PEKF</b>	Parallel Extended Kalman Filters (Filtres de Kalman Étendus Parallèles).
<b>PF</b>	Particle Filter (Filtre Particulaire).
<b>PMF</b>	Point Mass Filter.
<b>RADAR</b>	Radio Detection And Ranging.
<b>RSB</b>	Rapport Signal sur Bruit.
<b>S/B</b>	Signal sur Bruit.
<b>SER</b>	Surface Équivalente Radar.
<b><math>T_{B/S}</math></b>	Période de Branchement/Sélection.
<b>UKF</b>	Unscented Kalman Filter.
<b>UT</b>	Unscented Transformation.





# Introduction



## Estimation non-linéaire

Le filtrage non-linéaire permet d'estimer l'état d'un système à partir d'informations a priori sur son évolution (modèle d'état) et de mesures réelles polluées par du bruit d'observation. Ses applications sont nombreuses :

- Trajectographie,
- Localisation (Radar, GPS),
- Communications numériques,
- Robotique,
- Conduites optimales.

Ainsi, le problème de filtrage est souvent au centre de procédures de contrôle et d'automatisation d'activités humaines, industrielles et stratégiques.

## Solutions Exactes

Dans le cas particulier de systèmes linéaires-gaussiens, le filtre dû à Kalman, Bucy et Stratonovitch [Kalman 60, Stratonovitch 60a, Stratonovitch 60b, Kalman 61]<sup>1</sup> permet une résolution optimale en dimension finie du problème d'estimation.

Une telle solution n'existe pas dans le cas général de systèmes non-linéaires qui constituent un sujet de recherche privilégié en automatique et traitement de signal. Différentes solutions approchées ont été proposées dans leur littérature respectives.

## Solutions approchées

Basé sur une linéarisation du modèle d'état au voisinage de l'estimé, le filtre de Kalman étendu (FKE) constitue la solution approchée la plus utilisée par les ingénieurs. Cependant, ses capacités, uniquement locales, ne permettent pas une résolution efficace en présence de fortes non-linéarités et peuvent conduire à des instabilités.

Des techniques, plus générales, basées sur un maillage de l'espace d'état et/ou de l'espace de probabilité ont été développées très tôt, notamment en poursuite de phase [Bucy 71, Bucy 73]. Elles permettent d'atteindre des performances d'autant meilleures que les ressources de calcul mises en œuvre sont importantes. Toutefois, en pratique, pour la plupart de telles techniques, la complexité algorithmique nécessaire est irréaliste, notamment dans les conditions les plus critiques<sup>2</sup>, limitant ainsi leurs champs d'application.

Pour des systèmes stables de faibles dimensions, les maillages déterministes permettent d'accéder à des hautes performances à de faibles coûts algorithmiques, grâce à leurs propriétés de convergence en  $\frac{1}{N}$ . Cependant, en l'absence de techniques efficaces de maillages déterministes adaptés, l'explosion combinatoire de la complexité avec la dimension les rendent impraticables dans le cas de systèmes de dimension importante et de processus instables.

---

<sup>1</sup>[Kalman 60] concerne le cas de systèmes sans bruit dynamique, ce qui équivaut aux "moindres carrés récursifs" déjà connu des statisticiens. Stratonovitch donna la même année la solution générale avec bruit dynamique tant dans le cas linéaire [Stratonovitch 60a] que non linéaire [Stratonovitch 60b]. Le cas linéaire fut retrouvé et plus amplement développé dans [Kalman 61]

<sup>2</sup>forte non-linéarité, faible Rapport signal/bruit, dynamique importante, multidimension

D'autres approches, comme le filtre particulaire, basées sur le maillage aléatoire de l'espace d'état, abusivement rassemblées sous l'appellation méthodes de Monte-Carlo<sup>3</sup>, s'avèrent plus conformes en loi que les maillages déterministes "naïfs". En effet, de telles techniques permettent de concentrer l'essentiel des ressources de calcul disponibles dans les régions les plus pertinentes de l'espace d'état. Cependant, cette qualité n'est pas due à une caractéristique intrinsèque du tirage aléatoire, mais à l'adaptation du maillage aux densités de probabilités concernées par l'approximation. Notons, par ailleurs, que cette économie ne permet qu'une limitation de l'explosion combinatoire de la complexité avec la dimension d'état. En effet, même pour le problème d'intégration multivariable<sup>4</sup>, les techniques de Monte Carlo originelles ne permettent pas d'éviter la "course à la dimensionnalité" [Daum 03].

## Solutions particulières

On retrouve dès 1969/70 dans [Handschin 69, Handschin 70] les premières idées de technique particulaire à la Monte Carlo, mais divergentes en temps infini, de part l'absence de redistribution.

La technique particulaire à redistribution aléatoire fut basée originellement sur l'interprétation des équations de filtrage non-linéaire [Salut 89] par un processus de branchement à naissance et mort dans une population de particules analogue à celui de la sélection naturelle. A nombre de particules constant, elle engendre un maillage évolutif interdépendant de l'espace d'état permettant une approximation paramétrique finie de la densité de probabilité conditionnelle. Elle fut brevetée dans [Salut 94] après plusieurs applications probantes entre 1991 et 1993. D'autres chercheurs ont développé des idées similaires [Gordon 93, Kitagawa 93].

Ce maillage particulaire est construit récursivement par simulation aléatoire des flots dynamiques du système et pondération du maillage induit selon l'observation. La redistribution régulière des particules sur leur support permet de les concentrer sur les régions les plus pertinentes de l'espace d'état, évitant ainsi le problème de dégénérescence des techniques de Monte Carlo évoquées plus haut.

Deux améliorations substantielles ont pu être apportées à la méthode particulaire, utilisant originellement des particules entièrement aléatoire de Dirac :

- L'utilisation des particules gaussiennes, d'abord sous forme de filtres de Kalman conditionnellement exacts [Rigal 93] quand le modèle d'état le permet, puis sous forme de particules gaussiennes étendues par approximation locale du modèle d'état dans l'espace tangent. L'introduction des densités gaussiennes a permis d'allier les performances locales du filtre de Kalman étendu et celles globales qu'offre la technique particulaire, offrant ainsi des améliorations considérables des performances, notamment en terme de complexité algorithmique et de temps de convergence.
- Le développement de procédures déterministes de redistribution [Monin 95, Rigal 95, Gall 00] permet d'éviter l'aléa externe inutilement introduit par la répartition aléatoire des particules sur leur support. Mais ces procédures, non conformes en loi, s'avèrent non justifiées pour le filtrage à minimum de variance.

Bien qu'elle permette une résolution conforme du problème de filtrage non-linéaire sans restriction particulière sur la nature des équations d'état et/ou des distributions des bruits, la méthode à

<sup>3</sup>qui supposent l'indépendance des tirages aléatoires

<sup>4</sup>problème plus facile que le filtrage en raison de la connaissance exacte de l'intégrande (densité de probabilité)

particules aléatoires souffre d'une complexité algorithmique fortement croissante avec les conditions de dynamique et d'observation, d'une part, et la dimension d'état, d'autre part. En effet, l'effort<sup>5</sup> nécessaire à la représentation des flots du système par tirages aléatoires partage avec les méthodes de Monte Carlo l'inconvénient des propriétés de convergence, au moins séquentiellement, en  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ .

## Applications Radar et GPS

Les deux problèmes de localisation concernés par cette étude présentent un grand nombre de similitudes. En effet, tous deux consistent à extraire la position relative entre un récepteur et un émetteur<sup>6</sup> d'ondes électromagnétiques. Ils sont décrits par des modèles d'état très similaires concentrant un grand nombre des difficultés rencontrées en traitement du signal non-linéaire :

- Fortes non-linéarités,
- Bruits non-gaussiens,
- Faibles rapports Signal/Bruit,
- Vecteur d'état multidimensionnel<sup>7</sup>.

Le problème GPS se distingue par son caractère hybride dû à la présence d'un message binaire de navigation.

Le problème Radar, quant à lui, est soumis à :

- des plus faibles rapports Signal/Bruit à cause de l'atténuation plus forte de l'onde pendant le trajet aller-retour,
- ainsi qu'à des fluctuations<sup>8</sup> imprévisibles des amplitudes et phases du signal lors de sa réflexion sur la cible.

Les difficultés, reconnues en traitement de signal, de ces deux problèmes de localisation, dues aux contraintes de dynamique et d'observation imposées par leurs modèles, en font des cas pratiques d'évaluation de choix pour les nouvelles techniques de résolutions du problème de filtrage non-linéaire. Ainsi, c'est tout naturellement qu'elles ont figurées parmi les premières applications [Rigal 92b, Noyer 92, Carvalho 95, Chamon 96] des filtres particulières.

D'une part, dans le cas radar, [Noyer 96] est l'étude la plus complète<sup>9</sup> des performances du filtre particulière pour la détection/poursuite de cibles non-coopératives fortement manœuvrantes. Cependant, cette étude ne concernait que les filtres de Kalman-conditionnels avec redistribution aléatoire des particules, d'où un coût de calcul très élevé.

D'autre part, l'application GPS [Carvalho 95] s'intéressait au problème du traitement conjoint des informations issues d'une centrale inertielle et des mesures de pseudo-distances satellite-récepteur du GPS, et ne concernait, donc, pas le traitement amont du signal GPS brut.

---

<sup>5</sup>Essentiellement du au gaspillage des ressources

<sup>6</sup>réflecteur dans le cas radar

<sup>7</sup>jusqu'à 11 composantes d'état pour le traitement tridimensionnel du signal Radar

<sup>8</sup>fonctions de la fréquence d'émission et des angles de présentation de la cible

<sup>9</sup>Allant jusqu'à l'évaluation sur données réelles [Noyer 00]

## Objectifs et contributions

Les objectifs originels de la présente thèse étaient, donc :

- D’une part, d’appliquer le traitement particulière, dans ses versions les plus récentes, aux signaux bruts GPS pour évaluer les gains en performances dans l’estimation de la pseudo-distance et la réception des messages de navigation.
- D’autre part, de compléter l’étude dans le cas radar, en intégrant les dernières améliorations de la technique particulière, à savoir l’utilisation de particules gaussiennes généralisées et la redistribution déterministe, et d’estimer la réduction de la complexité algorithmique qu’elles apportent.

Les premiers résultats obtenus, dans ce sens, sont brièvement reportés dans [Ziadi 01], où il est question de traitement à particules aléatoires de Gauss du signal GPS à la sortie du filtre adapté.

L’intérêt suscité par la technique entièrement déterministe, développé originellement dans le cas de variables d’état discrètes [Bensalem 02], a motivé l’enrichissement des objectifs, initialement pratiques, de nos travaux par la généralisation de cette approche au cas de variables d’état continues multidimensionnelles<sup>10</sup>.

Les contributions principales de nos travaux se situent :

- D’abord, sur le plan méthodologique, par le développement du **filtre à particules déterministes de Gauss** dans le cas général de variables d’état continues [Salut 04, Ziadi 05]. Cette méthode est présentée dans le chapitre 2 de la partie I du présent rapport. Elle y est précédée par un rappel des principes et solutions du filtrage non-linéaire (Chapitre 1) et succédée par un premier exemple applicatif (Chapitre 3) qui en illustre les performances.

- Ensuite, sur le plan pratique, à travers deux applications de grand intérêt :

Traitement des signaux Radar (Partie II) où l’on développe le **récepteur à particules déterministes de Gauss** :

Pour le **radar de poursuite** (Chapitre 3), dont les performances sont illustrées, outre en simulation, par le traitement de données réelles (Chapitre 4).

Pour le **radar de veille** (Chapitre 5).

Traitement des signaux GPS (Partie III) : Un **récepteur particulière déterministe du signal GPS** y est proposé :

Dans le cas de **poursuite** (Chapitre 3), sous condition d’information initiale suffisante, pour le traitement du signal à la sortie du filtre adapté.

Dans le cas d’**acquisition** (chapitre 4), où les incertitudes initiales notamment sur la vitesse<sup>11</sup> sont importantes et mettent en échec le filtre adapté. Le traitement se fait, alors, sur le signal à spectre étalé<sup>12</sup> par le code satellite.

<sup>10</sup>Dans [Bensalem 02], le maillage particulière déterministe ne concerne que le message discret. Les autres composantes du vecteur d’état (paramètres du canal de transmission) sont estimées, grâce à leur faible dynamique, par des filtres de Kalman étendus conditionnels.

<sup>11</sup>fréquence Doppler

<sup>12</sup>sans filtre adapté

Première partie

**Filtrage non-linéaire  
et solutions particulières**





---

La Contribution centrale des travaux de recherche présentés dans ce rapport est le développement d'une technique particulière entièrement déterministe pour la résolution du problème de filtrage non-linéaire.

La méthode particulière dont il est question ici (cf chapitre 2) reprend l'idée de l'exploration des trajectoires d'état par Branchement/Sélection déterministe introduite dans [Salut 01, Bensalem 02] pour le cas de variables d'état discrètes, dont elle étend l'application au cas continu. L'algorithme est complété par des procédures (exclusion mutuelle, décomposition des particules) permettant de garantir une exploitation efficace des ressources de calcul pour atteindre des hautes performances (tenue d'accrochage, précision, robustesse) avec un coût algorithmique minimal. Une première illustration de ces performances est reportée au chapitre 3 à travers l'application du filtre particulière à la poursuite de phase.

Aussi, pour mieux situer le filtre proposé par rapport à d'autres méthodes de filtrage non-linéaire, le chapitre 1 rappelle le principe de l'estimation non-linéaire et énumère les principales techniques de filtrage existantes. Ces techniques sont présentées non pas sous l'angle algorithmique comme de coutume, mais sous celui des approximations sous-jacentes et des procédures d'optimisation de calcul employées, permettant d'évaluer leurs performances et l'étendu de leurs domaines d'application.

Par ailleurs, de par ses origines, les performances du filtre particulière continuent d'être attribuées à tort à son aspect aléatoire. La présentation du filtre particulière comme une technique de résolution numérique des équations de filtrage (propagation approchée des densités de probabilité sous contrainte de ressources de calcul) [cf section 9 du chapitre 1], permet, d'une part de montrer le rôle secondaire, parfois néfaste, du tirage aléatoire, et d'autre part de réaliser une synthèse des principales variantes de la méthode à particules aléatoires.



# Chapitre 1

## Estimation non-linéaire des processus markoviens (Rappels)

### 1 Introduction

Ce chapitre présente un état de l’art non-exhaustif des méthodes d’estimation non-linéaires. Un soin particulier a été apporté à la présentation et classification des techniques d’approximation qui y sont présentées, afin de faciliter leur comparaison.

En effet, à défaut de solution exacte pour le cas général du problème d’estimation non-linéaire, différentes méthodes approchées ont été proposées dans la littérature. La technique particulière développée au cours de cette thèse en fait partie, elle appartient à la famille des techniques basées sur une résolution numérique des équations de filtrage par discrétisation des espaces d’état et/ou de probabilité.

Nous nous sommes restreints dans ce qui suit aux techniques les plus utilisées de cette famille, en développant pour chacune d’entre-elles les équations approchées de filtrage non-linéaire induites par la discrétisation mise en œuvre.

Le filtre à particules déterministes, comme son prédécesseur “aléatoire”, vient compléter les techniques d’approximation déterministes, en apportant une solution adaptée au problème d’explosion combinatoire de la complexité algorithmique sans restriction du domaine d’applicabilité de la méthode. D’où la classification Déterministe/Aléatoire des méthodes citées et l’ordre, de la plus intuitive à la plus complète au sein de chaque catégorie, adoptés pour leur présentation.

### 2 Position du problème

D’une manière générale, le problème d’estimation dynamique consiste à reconstruire un processus stochastique  $x_\tau$  à partir de son observation bruitée  $y_t$ . Le filtrage concerne l’estimation de la valeur courante  $x_t$  ( $\tau = t$ ). La prédiction et le lissage concernent, respectivement, celles des valeurs postérieures ( $\tau > t$ ) et antérieures ( $\tau < t$ ).

Soit  $x_k$  un processus stochastique à réalisation markovienne dont la dynamique est régie par l'équation récurrente suivante :

$$x_{k+1} = f_k(x_k, w_k) \quad (1.1)$$

où  $x_k$  représente l'état du système,  $f_k : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$  est la fonction de transition mesurable et où  $w_k \in \mathbf{R}^m$  est le bruit source indépendant de densité de probabilité a priori  $p_k^w(\cdot)$  connue.

Le processus  $x_k$  est observé à travers un processus bruité  $y_k \in \mathbf{R}^p$  lié au vecteur d'état par l'équation d'observation :

$$y_k = h_k(x_k, v_k) \quad (1.2)$$

où  $h_k : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^p$  est la fonction de mesure et  $v_k \in \mathbf{R}^p$  est le bruit de mesure indépendant de densité de probabilité a priori  $p_k^v(\cdot)$  connue.

Le filtrage consiste à déterminer, à partir des mesures disponibles, le meilleur estimateur  $\hat{x}_k$  de l'état  $x_k$  optimisant un critère de performance donné  $J(\hat{x}_k)$ ; on parle alors d'estimateur de l'état  $x_k$  selon le critère  $J(\hat{x}_k)$ .

### 3 Estimateur à maximum de vraisemblance trajectorielle

L'estimateur à maximum de vraisemblance trajectorielle cherche à déterminer la trajectoire  $X_k = \{x_\tau, \tau = 0, \dots, k\}$  la plus vraisemblable au vue des observations  $Y_k = \{y_\tau, \tau = 0, \dots, k\}$ . Il est défini par :

$$\hat{X}_k = \arg \max_{X_k} V(X_k|Y_k) = \arg \max_{X_k} \log(p(X_k|Y_k)) \quad (1.3)$$

où  $V(X_k|Y_k)$  est la vraisemblance conditionnelle de la trajectoire  $X_k$  sachant les observations  $Y_k$ .

### 4 Estimateur à maximum de vraisemblance marginale

Cet estimateur  $\bar{x}_k$  maximise la vraisemblance marginale de l'état  $x_k$  donnée par :

$$\bar{x}_k = \arg \max_{x_k} V(x_k|Y_k) = \arg \max_{x_k} \log(p(x_k|Y_k)) \quad (1.4)$$

où,

$$p(x_k|Y_k) = \iint p(X_k|Y_k) dX_{k-1}$$

#### Remarque 4.1

*Contrairement au cas linéaire-gaussien, dans le cas général, le maximum de vraisemblance marginale  $\bar{x}_k$  ne coïncide généralement pas avec le point terminal de la trajectoire à maximum de vraisemblance  $\hat{X}_k$*

### 5 Estimateur à minimum de variance

Cet estimateur minimise la variance de l'erreur de filtrage donnée par :

$$E[\|x_k - \hat{x}_k\|^2] \quad (1.5)$$

où  $\hat{x}_k$  désigne l'estimateur à minimum de variance de l'état  $x_k$ . L'estimateur  $\hat{x}_k$  est construit à partir de l'ensemble des observations disponibles  $Y_k = \{y_\tau, \tau = 0, \dots, k\}$ , il coïncide avec l'espérance conditionnelle :

$$\hat{x}_k = E[x_k|Y_k] = \int x_k p(x_k|Y_k) dx_k \quad (1.6)$$

L'estimateur à minimum de variance nécessite donc, comme dans le cas précédent, la connaissance de la densité probabilité conditionnelle marginale  $p(x_k|Y_k)$ .

### Remarque 5.1

La densité de probabilité marginale  $p(x_k|Y_k)$  est l'intégrale de  $p(X_k|Y_k)$  le long de la trajectoire d'état  $\{x_\tau, \tau = 0, \dots, k-1\}$

$$P(x_k|Y_k) = \int \int_{X_{k-1}} p(X_k|Y_k) dX_{k-1}$$

L'opération de filtrage pour les trois critères cités, est donc basée sur la reconstruction de la densité de probabilité trajectorielle  $P(X_k|Y_k)$ .

## 6 Équations générales du filtrage

L'objet du filtrage est donc de reconstruire la densité de probabilité conditionnelle trajectorielle  $p(X_k|Y_k)$ . Cette densité peut être calculée récursivement en deux étapes :

### 6-1 Prédiction markovienne

Il s'agit de calculer, à l'instant  $k$ , la densité de probabilité  $p(X_k|Y_{k-1})$ , conditionnelle aux  $k-1$  dernières observations  $Y_{k-1}$ , à partir de la connaissance de la densité de probabilité conditionnelle  $p(X_{k-1}|Y_{k-1})$  à l'instant précédent, et en se basant sur le caractère markovien du système. Equation récursive de *Markov* :

$$p(X_k|Y_{k-1}) = p(x_k|x_{k-1})p(X_{k-1}|Y_{k-1}) \quad (1.7)$$

Cette équation traduit la prédiction à un pas des densités des probabilités conditionnelles. Elle s'obtient à partir de l'équation d'évolution dynamique (1.1) et de la densité de probabilité du bruit de dynamique  $w_k$ .

### Remarque 6.1

- Par intégration de l'équation 1.7 selon  $X_{k-1}$ , on retrouve l'équation de Chapman-Kolmogorov de prédiction de la densité de probabilité conditionnelle de l'état :

$$p(x_k|Y_{k-1}) = \int p(x_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|Y_{k-1})dx_{k-1} \quad (1.8)$$

- Par passage au logarithme, l'équation 1.7 devient :

$$V(X_k|Y_{k-1}) = V(x_k|x_{k-1}) + V(X_{k-1}|Y_{k-1}) \quad (1.9)$$

où  $V(x_k|x_{k-1})$  correspond à la vraisemblance de transition de l'équation de Bellman dans le sens direct :

$$V(X_k) = V(u_{k-1}) + V(y_k|x_k) + V(X_{k-1})$$

sous la contrainte dynamique,

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1})$$

avec,

- $V(u_{k-1})$  vraisemblance de la commande  $u_{k-1}$ ,
- $V(y_k|x_k)$  vraisemblance d'observation, où  $y_k$  joue le rôle d'une consigne à suivre.

## 6-2 Correction bayesienne

Cette étape se base sur la règle de *Bayes*, et consiste en la correction de la densité de probabilité conditionnelle au vue de la nouvelle observation  $y_k$ .

$$p(X_k|Y_k) = \frac{p(y_k|x_k)p(X_k|Y_{k-1})}{p(y_k|Y_{k-1})} \quad (1.10)$$

le terme de normalisation  $p(y_k|Y_{k-1})$  se réécrit en se basant sur le caractère markovien :

$$p(y_k|Y_{k-1}) = \iint_{X_k} p(y_k|x_k)p(X_k|Y_{k-1})dX_k \quad (1.11)$$

D'autre part, la densité de probabilité  $p(y_k|x_k)$  est déterminée à partir de l'équation d'observation (1.2) et de la densité de probabilité du bruit de mesure  $v_k$ .

### Remarque 6.2

- On retrouve l'équation de correction de Bayes en filtrage à minimum de variance en intégrant l'équation 1.10 selon  $X_{k-1}$  :

$$p(x_k|Y_k) = \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|Y_{k-1})}{p(y_k|Y_{k-1})} \quad (1.12)$$

- Par passage au logarithme, l'équation 1.10 devient :

$$V(X_k|Y_k) = V(y_k|x_k) + V(X_k|Y_{k-1}) + cte \quad (1.13)$$

où  $V(y_k|x_k)$  correspond à la vraisemblance d'observation dans l'équation de Bellman dans le sens direct.

Il apparaît clairement des équations de filtrage (1.7) et (1.10) que la résolution du problème de filtrage de processus markovien à temps discret repose sur la connaissance des densités de probabilité de transition  $p(x_k|x_{k-1})$  et d'observation  $p(y_k|x_k)$ .

## 7 Solutions optimales

### 7-1 Cas de variables d'état à valeurs discrètes dans un alphabet fini

Soit  $x_k$  une variable d'état à valeurs discrètes dans un alphabet fini  $B = \{a_i, i \in \{1, \dots, Q\}\}$  dont la dynamique est décrite par un automate à état fini avec  $p_{ij} = p(a_i|a_j)$  probabilité de transition de l'état  $j$  à l'état  $i$ .

A chaque instant  $k$ , la probabilité conditionnelle de l'état  $p(x_k|Y_k)$  est donnée par une somme pondérée de mesures de Dirac :

$$p(x_k|Y_k) = \sum_{i=1}^Q \alpha_i \delta(x_k - a_i) \quad (1.14)$$

où  $\alpha_i$  représente la probabilité a posteriori de l'état  $i$ , et  $\delta()$  mesure de Dirac.

$p(x_k|Y_k)$  est entièrement décrite par les poids  $\alpha_i$ . Les équations de filtrage (1.8,1.12) pour le minimum de variance et le maximum de vraisemblance marginal reviennent à la mise à jour récursive

des coefficients  $\alpha_i$  et peuvent être résolues en dimension finie.

### Equations de filtrage

#### Prédiction

$$\alpha_i^{k|k-1} = \sum_{j=1}^Q p_{ij} \alpha_j^{k-1|k-1} \quad (1.15)$$

#### Correction

$$\alpha_i^{k|k} = \frac{\alpha_i^{k|k-1} p(y_k | a_i)}{\sum_{i=1}^Q \alpha_i^{k|k-1} p(y_k | a_i)} \quad (1.16)$$

Rappelons que, si  $h$  et  $h^{-1}$  sont continûment dérivables [Jazwinski 70] :

$$p(y_k | a_i) = p_v(h^{-1}(y_k, a_i)) \left\| \frac{\partial h^{-1}}{\partial y_k} \right\| \quad (1.17)$$

et l'équation de correction 1.16 devient,

$$\alpha_i^{k|k} = \frac{\alpha_i^{k|k-1} p_v(h^{-1}(y_k, a_i)) \left\| \frac{\partial h^{-1}}{\partial y_k} \right\|}{\sum_{i=1}^Q \alpha_i^{k|k-1} p_v(h^{-1}(y_k, a_i)) \left\| \frac{\partial h^{-1}}{\partial y_k} \right\|} \quad (1.18)$$

#### Remarque 7.1

– L'estimée à minimum de variance est alors donnée par,

$$\hat{x}_{k|k} = \sum_{i=1}^Q \alpha_i^{k|k} a_i \quad (1.19)$$

– L'estimée à maximum de vraisemblance marginale est donnée par,

$$\bar{x}_{k|k} = a_{\arg \max_i (\alpha_i^{k|k})} \quad (1.20)$$

– Le calcul récursif de la probabilité conditionnelle trajectorielle  $p(X_k | Y_k)$ , pour l'estimation à maximum de vraisemblance trajectorielle, nécessite le calcul d'un nombre croissant de paramètres ( $Q^{k+1}$ ).

L'algorithme de Viterbi [Fourney 73] permet la résolution du problème d'estimation trajectorielle avec un coût limité. Il consiste en une mise en œuvre du principe d'optimalité de Bellman en ne conservant qu'une unique trajectoire incidente par valeur d'état discrète. La complexité algorithmique est alors limitée à  $Q^2$ .

## 7-2 Cas linéaire-gaussien

Soit le système linéaire-gaussien décrit par,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F_k x_k + G_k w_k \\ y_{k+1} &= H_{k+1} x_{k+1} + v_{k+1} \end{aligned} \quad (1.21)$$

où



- $w_k$  et  $v_{k+1}$  deux bruits blancs gaussiens indépendants de moyennes nulles et de covariances respectives  $Q_k \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$  et  $R_k \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p$ ,
- L'état initial  $x_0$  est distribué selon la densité de probabilité gaussienne  $\mathcal{N}(\hat{x}_0, P_0)$ ,
- $F_k \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ ,  $G_k \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ , et  $H_{k+1} \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^n$

La solution du problème de filtrage linéaire-gaussien, pour le minimum de variance est donnée par les équations bien connues traduisant l'évolution des moyenne et variance conditionnelles de l'état  $\hat{x}_{k|k}$  et  $P_{k|k}$  :

### Prédiction

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1|k} &= F_k \hat{x}_{k|k} \\ P_{k+1|k} &= F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T\end{aligned}\tag{1.22}$$

### Correction

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1|k+1} &= \hat{x}_{k+1|k} + K_k (y_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1|k}) \\ P_{k+1|k+1} &= P_{k+1|k} - K_k H_{k+1} P_{k+1|k} \\ K_k &= P_{k+1|k} H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1|k} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1}\end{aligned}\tag{1.23}$$

$K_k \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$  étant la matrice de gain de Kalman.

### Remarque 7.2

Pour une densité gaussienne, moyenne et maximum de probabilité étant égaux, l'estimée à maximum de vraisemblance marginale coïncide avec celle à minimum de variance,

$$E[x_k | Y_k] = \arg \max_{X_k} \log(p(x_k | Y_k))$$

### Maximum de vraisemblance trajectorielle

L'estimation à maximum de vraisemblance trajectorielle peut être obtenue en considérant le système linéaire-gaussien à état augmentant [Anderson 79] :

$$\begin{aligned}X_{k+1} &= \begin{bmatrix} F_k & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} X_k + \begin{bmatrix} G_k \\ 0 \end{bmatrix} w_k \\ y_{k+1} &= \begin{bmatrix} H_{k+1} & 0 \end{bmatrix} X_{k+1} + v_{k+1}\end{aligned}\tag{1.24}$$

Les équations du filtre de Kalman à maximum de vraisemblance trajectorielle sont alors données par :

### Prédiction

$$\begin{aligned}\hat{X}_{k+1|k} &= \begin{bmatrix} F_k & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} \hat{X}_{k|k} \\ \mathcal{P}_{k+1|k} &= \begin{bmatrix} F_k & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} \mathcal{P}_{k|k} \begin{bmatrix} F_k & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} G_k \\ 0 \end{bmatrix} Q_k \begin{bmatrix} G_k \\ 0 \end{bmatrix}^T\end{aligned}\tag{1.25}$$

**Correction**

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{k+1|k+1} &= \hat{X}_{k+1|k} + \mathcal{K}_k(y_{k+1} - [H_{k+1} \ 0] \hat{X}_{k+1|k}) \\
\mathcal{P}_{k+1|k+1} &= \mathcal{P}_{k+1|k} - \mathcal{K}_k [H_{k+1} \ 0] \mathcal{P}_{k+1|k} \\
\mathcal{K}_k &= \mathcal{P}_{k+1|k} [H_{k+1} \ 0]^T ([H_{k+1} \ 0] \mathcal{P}_{k+1|k} [H_{k+1} \ 0]^T + R_{k+1})^{-1}
\end{aligned} \tag{1.26}$$

**Remarque 7.3**

*Le développement des équations du filtre de kalman à maximum de vraisemblance trajectorielle permet de vérifier, aisément, que, pour le cas linéaire-gaussien, le point terminal de la trajectoire à maximum de vraisemblance coïncide avec les estimées marginales (minimum de variance et maximum de vraisemblance marginale).*

La solution ci-dessus du maximum de vraisemblance trajectorielle met en œuvre un calcul matriciel avec des dimensions croissantes  $\mathcal{P}_{k|k} \in \mathbf{R}^{n_k} \times \mathbf{R}^{n_k}$ . Ce problème peut être contourné en décomposant le filtrage à maximum de vraisemblance trajectorielle en deux étapes :

- Un filtre avant à maximum de vraisemblance marginale ( $\equiv$  minimum de variance).
- Un lissage (filtre arrière) linéaire-gaussien des estimées du filtre avant  $\hat{x}_{\tau|\tau}$  pour  $\tau \in \{0, \dots, k\}$  pour obtenir les composantes  $\hat{x}_{\tau|k}$  de l'estimée à maximum de vraisemblance trajectorielle  $\hat{X}_{k|k}$ .

*Lisseur linéaire-gaussien de Kalman*

$$\begin{aligned}
S_{\tau} &= P_{\tau|\tau} F_{\tau} [F_{\tau} P_{\tau|\tau} F_{\tau}^T + G_{\tau} Q_{\tau} G_{\tau}^T]^{-1} \\
\hat{x}_{\tau|k} &= \hat{x}_{\tau|\tau} + S_{\tau} (\hat{x}_{\tau+1|k} - F_{\tau} \hat{x}_{\tau|\tau}) \\
P_{\tau|k} &= P_{\tau|\tau} - S_{\tau} (P_{\tau+1|k} - [F_{\tau} P_{\tau|\tau} F_{\tau}^T + G_{\tau} Q_{\tau} G_{\tau}^T]) S_{\tau}^T
\end{aligned} \tag{1.27}$$

pour  $\tau$  allant de  $k$  à 0, avec  $\hat{x}_{\tau|\tau}$  et  $P_{\tau|\tau}$  solutions des équations du filtre avant de Kalman à minimum de variance.

**7-3 Cas général**

Dans le cas général, la théorie non-linéaire ne permet pas une résolution du problème de filtrage en dimension finie. De nombreuses solutions approchées ont été proposées, dans la littérature, pour résoudre ce problème.

Les solutions les plus immédiates, mais dont l'application reste limitée aux situations les plus "régulières", sont celles qui ramènent le problème de filtrage non-linéaire à l'un des problèmes de filtrage qui admettent des solutions finies, soit par l'approximation linéaire-gaussienne du système d'état, soit par la discrétisation a priori de l'espace d'état. Plus généralement, de nombreuses solutions approchées du problème de filtrage non-linéaire sont basées sur l'approximation des équations d'état et/ou des densités de probabilité permettant une paramétrisation finie de la densité de probabilité conditionnelle, et ainsi une résolution en dimension finie du problème de filtrage.

Un autre type d'approche sous-optimale consiste à chercher les estimées optimales dans des classes restreintes d'estimateurs (fonctionnelles polynomiales séparables à degré fixé [Salut 81, Monin 93]).

## 8 Solutions approchées

D'après la section 7, seuls les problèmes à variables d'état discrètes dans un alphabet fini ou linéaire-gaussiennes admettent une solution optimale en dimension finie. Nombreuses techniques de résolutions approximatives sont, de ce fait, basées sur des discrétisations du problème de filtrage non-linéaire par des problèmes localement ponctuels et/ou linéaire-gaussiens. Dans ce qui suit, nous présentons quelques unes de ces solutions approchées classées selon la technique de choix des paramètres de discrétisation : déterministe/aléatoire.

### 8-1 Approches déterministes

Dans ce paragraphe, nous présentons des solutions approchées basées sur des discrétisations déterministes du problème de filtrage non-linéaire. Selon la technique utilisée, cette discrétisation peut être fixe ou évolutive.

#### 8-1-1 Filtre à grille “fixe”

Connu aussi sous le nom de “Point Mass Filter (PMF)”, la technique de filtrage à grille fixe est basée sur l'approximation numérique des intégrales sur  $\mathbf{R}^n$  :

$$\iint_{\mathbf{R}^n} f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^N f(x^i) \quad (1.28)$$

où  $\{x^i, i = 1, \dots, N\}$  forme une grille fixe régulièrement répartie sur un sous-ensemble borné  $C$  de  $\mathbf{R}^n$ .

La densité de probabilité conditionnelle de l'état est alors approchée par une somme pondérée de mesures de *Dirac* :

$$p(x_k|Y_k) \simeq \sum_{i=1}^N p(x^i|Y_k)\delta_{x^i}(x_k) \quad (1.29)$$

et les équations de filtrage non-linéaires relatives à  $p(x_k|Y_k)$ , par les équations 1.15 et 1.18 pour les systèmes à variable d'état discrète dans un alphabet fini, où les densités de probabilité de transition  $p_{ij}$  sont obtenues en appliquant à nouveau l'équation 1.17 :

$$p_{ij} = p(x^i|x^j) = p_w(f^{-1}(x^i, x^j)) \left\| \frac{\partial f^{-1}}{\partial x_{k+1}} \right\|$$

Le caractère non-évolutif de la grille utilisée par cette approximation restreint son application au cas des problèmes “stationnaires”, où le support de la densité de probabilité  $p(x_k|Y_k)$  ne varie pas ou peu dans le temps.

Pour l'estimation trajectorielle dans le cas d'une variable d'état continue, [Larson 66] ont développé un algorithme similaire à l'algorithme de Viterbi. [Morell 91] propose une technique similaire avec linéarisations locales du calcul des vraisemblances trajectoires.

### 8-1-2 Filtre de Kalman étendu (EKF)

Ce filtre n'a qu'un caractère local. Il est basé sur l'approximation linéaire-gaussienne du système d'état. En effet, les fonctions de transition et de mesure continûment dérivables peuvent être approchées, au voisinage immédiat de l'estimée courante  $\hat{x}_k$  et des moyennes (nulles) des bruits de dynamique et de mesure, par un développement limité en série de *Taylor* de premier ordre :

$$\begin{aligned} f(x_k, w_k) &\simeq f(\hat{x}_k, 0) + \mathbf{F}_{x_k}(\hat{x}_k, 0)(x_k - \hat{x}_k) + \mathbf{F}_{w_k}(\hat{x}_k, 0)w_k \\ h(x_k, v_k) &\simeq h(\hat{x}_k, 0) + \mathbf{H}_{x_k}(\hat{x}_k, 0)(x_k - \hat{x}_k) + \mathbf{H}_{v_k}(\hat{x}_k, 0)v_k \end{aligned}$$

où  $\mathbf{F}_{x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}$ ,  $\mathbf{F}_{w_k} = \frac{\partial f}{\partial w_k}$ ,  $\mathbf{H}_{x_k} = \frac{\partial h}{\partial x_k}$  et  $\mathbf{H}_{v_k} = \frac{\partial h}{\partial v_k}$  Jacobien respectifs de  $f$  et  $h$  selon  $x$ ,  $w$  et  $v$ . L'approximation par mesures gaussiennes de la densité de probabilité initiale  $p(x_0)$ , conjointement à celle des bruits de dynamique et de mesure  $p(w_k)$  et  $p(v_k)$  permet l'application d'un filtre de Kalman au système d'état, ainsi linéarisé.

#### Equation du EKF à minimum de variance

##### Prédiction

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} &= f(\hat{x}_{k|k}, 0) \\ P_{k+1|k} &= \mathbf{F}_{x_k}(\hat{x}_{k|k}, 0)P_{k|k}\mathbf{F}_{x_k}(\hat{x}_{k|k}, 0)^T + \mathbf{F}_{w_k}(\hat{x}_{k|k}, 0)Q_k\mathbf{F}_{w_k}(\hat{x}_{k|k}, 0)^T \end{aligned} \quad (1.30)$$

##### Correction

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k+1} &= \hat{x}_{k+1|k} + K_k(y_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1|k}, 0)) \\ P_{k+1|k+1} &= P_{k+1|k} - K_k\mathbf{H}_{x_{k+1}}(\hat{x}_{k+1|k}, 0)P_{k+1|k} \\ K_k &= P_{k+1|k}\mathbf{H}_{x_{k+1}}(\hat{x}_{k+1|k}, 0)^T (\mathbf{H}_{x_{k+1}}(\hat{x}_{k+1|k}, 0)P_{k+1|k}\mathbf{H}_{x_{k+1}}(\hat{x}_{k+1|k}, 0)^T \\ &\quad + \mathbf{H}_{v_{k+1}}(\hat{x}_{k+1|k}, 0)R_{k+1}\mathbf{H}_{v_{k+1}}(\hat{x}_{k+1|k}, 0)^T)^{-1} \end{aligned} \quad (1.31)$$

#### Remarque 8.1

- L'estimée approchée à maximum de vraisemblance marginale coïncide avec celle à minimum de variance.
- L'estimée approchée à maximum de vraisemblance trajectorielle est obtenue par filtrage (avant) approché à maximum de vraisemblance marginale, et lissage de Kalman étendu, basé sur la même approximation linéaire-gaussienne du problème.

##### Lisseur de Kalman étendu

$$\begin{aligned} S_\tau &= P_{\tau|\tau}\mathbf{F}_{x_k}(\hat{x}_{\tau|\tau}, 0) [\mathbf{F}_{x_k}(\hat{x}_{\tau|\tau}, 0)P_{\tau|\tau}\mathbf{F}_{x_k}(\hat{x}_{\tau|\tau}, 0)^T \\ &\quad + \mathbf{F}_{w_k}(\hat{x}_{\tau|\tau}, 0)Q_\tau\mathbf{F}_{w_k}(\hat{x}_{\tau|\tau}, 0)^T]^{-1} \\ \hat{x}_{\tau|k} &= \hat{x}_{\tau|\tau} + S_\tau (\hat{x}_{\tau+1|k} - f(\hat{x}_{\tau|\tau}, 0)) \\ P_{\tau|k} &= P_{\tau|\tau} - S_\tau (P_{\tau+1|k} - [\mathbf{F}_{x_k}(\hat{x}_{\tau|\tau}, 0)P_{\tau|\tau}\mathbf{F}_{x_k}(\hat{x}_{\tau|\tau}, 0)^T \\ &\quad + \mathbf{F}_{w_k}(\hat{x}_{\tau|\tau}, 0)Q_\tau\mathbf{F}_{w_k}(\hat{x}_{\tau|\tau}, 0)^T]) S_\tau^T \end{aligned} \quad (1.32)$$

pour  $\tau$  allant de  $k$  à 0, avec  $\hat{x}_{\tau|\tau}$  et  $P_{\tau|\tau}$  solutions des équations du filtre avant de Kalman étendu.

La validité locale de l'approximation linéaire-gaussienne et son caractère mono-modale limitent son champ d'application à de faibles non-linéarités et à des conditions favorables de dynamique et de mesure (faible bruit de dynamique et rapport signal sur bruit élevé).

### 8-1-3 Unscented Kalman Filter (UKF)

Le filtre “Unscented Kalman” [Julier 81] permet de relaxer la contrainte de linéarisation locale du Filtre de Kalman Etendu tout en gardant l’approximation gaussienne des densités de probabilité. En effet, basée sur la représentation des densités gaussiennes par un ensemble de points de discrétisation “soigneusement” choisis, l’UKF permet de propager la moyenne et la covariance conditionnelles a posteriori avec la précision du développement limité en série de Taylor du 3<sup>ème</sup> ordre. L’UKF utilise une méthode approchée de calcul des statistiques d’une transformation non-linéaire d’une variable aléatoire : la transformation Unscented (Unscented Transformation UT).

#### Définition 8.1 Unscented Transformation (UT)

soit  $x \in \mathbf{R}^n$  une variable aléatoire vectorielle de dimension  $L$ , de moyenne  $\hat{x}$  et de covariance  $P_x$  et  $y = g(x)$ ,  $g$  transformation non-linéaire de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^p$ .

Soit  $\chi = [\chi]_{i=0}^{2n}$  la sigma-matrice formée par les sigma-vecteurs  $\chi_i$  de poids  $\rho_i$ , avec :

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \hat{x} \\ \chi_i &= \hat{x} + \left( \sqrt{(n+\lambda)P_x} \right)_i \quad i = 1, \dots, n \\ \chi_i &= \hat{x} - \left( \sqrt{(n+\lambda)P_x} \right)_i \quad i = n+1, \dots, 2n \\ \rho_0^m &= \frac{\lambda}{n+\lambda} \\ \rho_0^c &= \frac{\lambda}{n+\lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ \rho_i^m &= \rho_i^c = \frac{1}{2(n+\lambda)} \quad i = 1, \dots, 2n \end{aligned}$$

avec,  $\lambda = \alpha^2(n+\kappa) - n$  un paramètre de calibrage de l’approximation.  $\alpha$  représente la répartition des sigma-vecteurs autour de la moyenne  $\hat{x}$ .  $\kappa$  un deuxième paramètre de calibrage ( $= 0$  en général), et  $\beta$  un paramètre représentant l’information a priori sur  $x$  ( $\beta = 2$ , pour une variable gaussienne).  $\left( \sqrt{(n+\lambda)P_x} \right)_i$  la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice racine carrée.

Soit :

$$\mathcal{Y}_i = g(\chi_i) \quad i = 0, \dots, 2n$$

La propagation des sigma-vecteurs  $\chi_i$  à travers  $g$ .

Une approximation de la moyenne  $\hat{y}$  et de la covariance  $P_y$  de la v.a.  $y$  est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{y} &\simeq \sum_{i=0}^{2n} \rho_i^m \mathcal{Y}_i \\ P_y &\simeq \sum_{i=0}^{2n} \rho_i^c (\mathcal{Y}_i - \hat{y})(\mathcal{Y}_i - \hat{y})^T \end{aligned}$$

L’UKF est une extension directe de l’UT pour l’estimation non-linéaire à minimum de variance, où la variable d’état est étendue par concaténation du vecteur d’état original et des bruits de dynamique et de mesure  $x_k^e = [x_k^T \ w_k^T \ v_k^T]^T$  de moyenne  $\hat{x}_k^e = [\hat{x}_k^T \ 0 \ 0]^T$  et de variance :

$$P_k^e = \begin{bmatrix} P_k & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix}$$

## Equations du UKF à minimum de variance

### Discrétisation par sigma-vecteurs

$$\begin{aligned}\chi_{k-1|k-1}^e &= \left[ \begin{array}{ccc} (\chi_{i,k-1|k-1}^x)^T & (\chi_{i,k-1|k-1}^w)^T & (\chi_{i,k-1|k-1}^v)^T \end{array} \right]^T_i \\ &= \left[ \begin{array}{c} \hat{x}_{k-1|k-1}^e \\ \hat{x}_{k-1|k-1}^e \pm \sqrt{(L + \lambda)P_{k-1|k-1}^e} \end{array} \right]\end{aligned}$$

avec  $L = n + m + p$  dimension du vecteur d'état augmenté  $x_k^e$ .

### Prédiction

$$\begin{aligned}\chi_{i,k|k-1}^x &= f(\chi_{i,k-1|k-1}^x, \chi_{i,k-1|k-1}^w) \\ \hat{x}_{k|k-1} &= \sum_{i=0}^{2L} \rho_i^m \chi_{i,k|k-1}^x \\ P_{k|k-1} &= \sum_{i=0}^{2L} \rho_i^c (\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{x}_{k|k-1})(\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{x}_{k|k-1})^T \\ \mathcal{Y}_{i,k|k-1} &= h(\chi_{i,k|k-1}^x, \chi_{i,k-1|k-1}^v) \\ \hat{y}_{k|k-1} &= \sum_{i=0}^{2L} \rho_i^m \mathcal{Y}_{i,k|k-1}\end{aligned}$$

### Correction

$$\begin{aligned}P_{\tilde{y}_k \tilde{y}_k} &= \sum_{i=0}^{2L} \rho_i^c (\mathcal{Y}_{i,k|k-1} - \hat{y}_{k|k-1})(\mathcal{Y}_{i,k|k-1} - \hat{y}_{k|k-1})^T \\ P_{x_k y_k} &= \sum_{i=0}^{2L} \rho_i^c (\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{x}_{k|k-1})(\mathcal{Y}_{i,k|k-1} - \hat{y}_{k|k-1})^T \\ \mathcal{K}_k &= P_{x_k y_k} P_{\tilde{y}_k \tilde{y}_k}^{-1} \\ \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + \mathcal{K}_k (y_k - \hat{y}_{k|k-1}) \\ P_{k|k} &= P_{k|k-1} - \mathcal{K}_k P_{\tilde{y}_k \tilde{y}_k} \mathcal{K}_k^T\end{aligned}$$

La méthode UKF permet d'allier l'approximation gaussienne au degré de liberté supérieur des sommes pondérées de mesures de Dirac dans la prédiction des parties non-linéaires. Elle n'en reste pas moins une méthode locale dont l'application est contrainte à des conditions analogues de dynamique et de mesure.

Par ailleurs, l'utilisation d'un ensemble minimal de points de discrétisation adapté aux densités gaussiennes, ne permet ni d'adapter l'algorithme aux fortes non-linéarités ou aux densités multimodales, ni d'espérer des résultats de convergence de cette technique.

### 8-1-4 Interactive multiple model (IMM)

Pour des situations plus critiques de dynamiques et de mesures où plusieurs modes de fonctionnement “linéarisables” peuvent être définis pour décrire le système non-linéaire, les fonctions de transition et de mesure peuvent être approchées par plusieurs modèles linéarisés conditionnels aux modes de fonctionnement. Les techniques à modèles multiples utilisent conjointement les approximations par linéarisations conditionnelles du système d’état et des discrétisations par des gaussiennes pondérées des densités de probabilité pour la résolution approchée du problème de filtrage non-linéaire. L’explosion combinatoire des hypothèses sur le mode de fonctionnement nécessite le recours à des techniques de réduction de leur nombre. Pour ce faire, les méthodes à modèles multiples interactifs (Interactive Multiple Models (IMM)) procèdent par fusion des gaussiennes conditionnelles au même mode courant de fonctionnement.

Soit  $\{\mathbf{m}_k^i\}_{i \in \{1, \dots, N\}}$   $N$  modèles linéarisés de probabilité conditionnelle  $p(\mathbf{m}_k^i | Y_k)$ . La probabilité conditionnelle du mode de fonctionnement  $\mathbf{m}_k$  est alors donnée par :

$$p(\mathbf{m}_k | Y_k) = \sum_{i=0}^{N-1} p(\mathbf{m}_k^i | Y_k) \delta_{\mathbf{m}_k^i}(\mathbf{m}_k)$$

et :

$$\begin{aligned} p(x_k | Y_k) &= \int p(x_k | \mathbf{m}_k, Y_k) d p(\mathbf{m}_k | Y_k) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} p(x_k | \mathbf{m}_k^i, Y_k) p(\mathbf{m}_k^i | Y_k) \end{aligned}$$

avec l’hypothèse gaussienne des densités  $p(x_k | \mathbf{m}_k^i, Y_k)$  :

$$p(x_k | Y_k) = \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{N}_{(\hat{x}_{k|k}^i, P_{k|k}^i)}(x_k | \mathbf{m}_k^i, Y_k) p(\mathbf{m}_k^i | Y_k)$$

où  $\mathcal{N}_{(\hat{x}_{k|k}^i, P_{k|k}^i)}(\cdot)$  est la densité gaussienne de moyenne  $\hat{x}_{k|k}^i$  et de covariance  $P_{k|k}^i$ .

#### Equations du IMM à minimum de variance

##### Prédiction

$$\begin{aligned} p(x_k | Y_{k-1}) &= \int p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | Y_{k-1}) dx_{k-1} \\ &= \int p(x_k | x_{k-1}) \left( \sum_{i=0}^{N-1} p(x_{k-1} | \mathbf{m}_{k-1}^i, Y_{k-1}) p(\mathbf{m}_{k-1}^i | Y_{k-1}) \right) dx_{k-1} \\ &= \int p(x_k | x_{k-1}) \left( \sum_{j=0}^{N-1} p(\mathbf{m}_k^j | Y_{k-1}) \left( \sum_{i=0}^{N-1} p(x_{k-1} | \mathbf{m}_{k-1}^i, Y_{k-1}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. p(\mathbf{m}_{k-1}^i | \mathbf{m}_k^j, Y_{k-1}) \right) \right) dx_{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int p(x_k | x_{k-1}) \sum_{j=0}^{N-1} p(\mathbf{m}_k^j | Y_{k-1}) \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{N}_{(\hat{x}_{k-1|k-1}^i, P_{k-1|k-1}^i)}(x_{k-1} | \mathbf{m}_{k-1}^i, Y_{k-1}) \\
&\quad p(\mathbf{m}_{k-1}^i | \mathbf{m}_k^j, Y_{k-1}) dx_{k-1} \\
&\simeq \sum_{j=0}^{N-1} p(\mathbf{m}_k^j | Y_{k-1}) \int p(x_k | x_{k-1}) \mathcal{N}_{(\hat{x}_{k-1|k-1}^j, P_{k-1|k-1}^j)}(x_{k-1} | \mathbf{m}_k^j, Y_{k-1}) dx_{k-1} \\
&\simeq \sum_{j=0}^{N-1} p(\mathbf{m}_k^j | Y_{k-1}) \mathcal{N}_{(\hat{x}_{k|k-1}^j, P_{k|k-1}^j)}(x_k | \mathbf{m}_k^j, Y_{k-1})
\end{aligned}$$

avec,

- $\mathcal{N}_{(\hat{x}_{k-1|k-1}^j, P_{k-1|k-1}^j)}(x_{k-1} | \mathbf{m}_{k-1}^i, Y_{k-1})$  approximation gaussienne de
- $\sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{N}_{(\hat{x}_{k-1|k-1}^i, P_{k-1|k-1}^i)}(x_{k-1} | \mathbf{m}_{k-1}^i, Y_{k-1}) p(\mathbf{m}_{k-1}^i | \mathbf{m}_k^j, Y_{k-1})$
- de moyenne  $\hat{x}_{k-1|k-1}^j = \sum_{i=0}^{N-1} p(\mathbf{m}_{k-1}^i | \mathbf{m}_k^j, Y_{k-1}) \hat{x}_{k-1|k-1}^i$
- et de covariance

$$\begin{aligned}
P_{k-1|k-1}^j &= \sum_{i=0}^{N-1} p(\mathbf{m}_{k-1}^i | \mathbf{m}_k^j, Y_{k-1}) \left( P_{k-1|k-1}^i \right. \\
&\quad \left. + (\hat{x}_{k-1|k-1}^i - \hat{x}_{k-1|k-1}^j)(\hat{x}_{k-1|k-1}^i - \hat{x}_{k-1|k-1}^j)^T \right)
\end{aligned}$$

- $p(\mathbf{m}_{k-1}^i | \mathbf{m}_k^j, Y_{k-1})$  probabilité de fusion donnée par  $\frac{p(\mathbf{m}_k^j | \mathbf{m}_{k-1}^i, Y_{k-1}) p(\mathbf{m}_{k-1}^i | Y_{k-1})}{p(\mathbf{m}_k^j | Y_{k-1})}$ ,
- $p(\mathbf{m}_k^j | \mathbf{m}_{k-1}^i, Y_{k-1})$  probabilité de transition entre les modes de fonctionnement  $i$  et  $j$ .
- $p(\mathbf{m}_k^j | Y_{k-1}) = \sum_{i=0}^{N-1} p(\mathbf{m}_k^j | \mathbf{m}_{k-1}^i, Y_{k-1}) p(\mathbf{m}_{k-1}^i | Y_{k-1})$ .
- $\mathcal{N}_{(\hat{x}_{k|k-1}^j, P_{k|k-1}^j)}(x_k | \mathbf{m}_k^j, Y_{k-1})$  prédiction locale selon le modèle  $\mathbf{m}_k^j$ , peut être obtenue par EKF, avec une approximation linéaire-gaussienne, ou par UKF avec une approximation du 3<sup>ème</sup> ordre de la fonction de transition.

### Correction

$$\begin{aligned}
p(x_k | Y_k) &= \frac{p(y_k | x_k) p(x_k | Y_{k-1})}{p(y_k | Y_{k-1})} \\
&= \frac{p(y_k | x_k) \sum_{j=0}^{N-1} p(\mathbf{m}_k^j | Y_{k-1}) \mathcal{N}_{(\hat{x}_{k|k-1}^j, P_{k|k-1}^j)}(x_k | \mathbf{m}_k^j, Y_{k-1})}{p(y_k | Y_{k-1})} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \left( \frac{p(\mathbf{m}_k^j | Y_{k-1}) p(y_k | \mathbf{m}_k^j, Y_{k-1})}{p(y_k | Y_{k-1})} \right) \left( \frac{p(y_k | x_k) \mathcal{N}_{(\hat{x}_{k|k-1}^j, P_{k|k-1}^j)}(x_k | \mathbf{m}_k^j, Y_{k-1})}{p(y_k | \mathbf{m}_k^j, Y_{k-1})} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} p(\mathbf{m}_k^j | Y_k) \mathcal{N}_{(\hat{x}_{k|k}^j, P_{k|k}^j)}(x_k | \mathbf{m}_k^j, Y_k)
\end{aligned}$$

avec,

- $p(y_k | Y_{k-1}) = \sum_{j=0}^{N-1} p(\mathbf{m}_k^j | Y_{k-1}) p(y_k | \mathbf{m}_k^j, Y_{k-1})$ ,
- $p(y_k | \mathbf{m}_k^j, Y_{k-1}) = p_v(h_j^{-1}(y_k, x_k)) \|\frac{\partial h_j^{-1}}{\partial y_k}\|$ ,  $h_j(x_k, v_k)$  fonction de mesure du modèle  $\mathbf{m}_k^j$ .
- Soit, sous l'hypothèse de bruit de mesure additive gaussien :
- $p(y_k | \mathbf{m}_k^j, Y_{k-1}) = \mathcal{N}_{(0, R_{j,k})}(y_k - h_j(\hat{x}_{k|k-1}^j))$



- $\mathcal{N}_{(\hat{x}_{k|k}^j, P_{k|k}^j)}(x_k | \mathbf{m}_k^j, Y_k)$  solution approchée locale du problème de correction selon le modèle  $\mathbf{m}_k^j$  obtenue par EKF ou UKF.

La modélisation approximative à travers plusieurs modes de fonctionnement locaux offre une possibilité de représentation globale. De plus, la discrétisation évolutive par densités gaussiennes permet une approximation plus fiable des densités de probabilité multimodales, et une adaptation des points de discrétisation à l'évolution du support de la densité de probabilité a posteriori.

Cependant, la fusion d'une somme pondérée de gaussiennes en une seule introduit une erreur d'approximation proportionnelle à leur dispersion dans l'espace d'état et limite, donc, les performances du filtre pour des conditions critiques de dynamique et de mesure. Par ailleurs, cette fusion ne conserve que les moyenne et variance de la densité originelle. Elle n'est donc pas adaptée aux problèmes d'estimation à maximum de vraisemblance marginale/trajectorielle.

### 8-1-5 Somme de gaussiennes

Les gaussiennes forment une base possible de l'espace des mesures, lorsque leur nombre tend vers l'infini. Toute densité de probabilité  $p(x)$  peut, donc, être approchée à la précision désirée, dans l'espace  $L_1(\mathbf{R}^n)$ , par une somme finie pondérée de  $N$  densités gaussiennes élémentaires de moyenne  $\hat{x}^i$ , de covariance  $P^i$  et de poids respectifs  $\rho^i$  tels que  $\sum_{i=0}^{N-1} \rho^i = 1$ . [Anderson 79]

$$p(x) \simeq p_N(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \rho^i \mathcal{N}_{(\hat{x}^i, P^i)}(x)$$

L'approximation par sommes pondérées de gaussiennes, ainsi définie, a été, d'abord, brièvement proposée en filtrage non-linéaire dans [Aoki 65], puis, utilisée en filtrage linéaire à bruit additif gaussien et à densité de probabilité a priori  $p(x_0)$  non-gaussienne, séparément dans [Cameron 68] et [Lo 69]. Le filtre consistait, alors, en un banc de filtres de Kalman parallèles et indépendants.

L'extension théorique au cas plus général de filtrage non-linéaire sans condition particulière sur les densités de probabilité des bruits a été proposée dans [Sorenson 71], [Alspach 70]. Elle recourt à des approximations conjointes de la densité de probabilité initiale  $p(x_0)$  et des densités de probabilité du bruit de dynamique  $p(w_k)$  et du bruit de mesure  $p(v_k)$  par sommes pondérées de gaussiennes. Le choix arbitrairement faible des variances des densités gaussiennes élémentaires assure à la fois la convergence des approximations locales du système d'état, quand les variances élémentaires tendent vers zéro [Anderson 79] et celle du filtre global, quand le nombre de densités gaussiennes élémentaires tend vers l'infini.

### Equations du filtre à somme pondérée de gaussiennes pour la densité de probabilité conditionnelle marginale Discrétisation initiale

$$\begin{aligned} p(x_0) \simeq p_{N_0}(x_0) &= \sum_{i=0}^{N_0-1} \rho_0^i \mathcal{N}_{(\hat{x}_0^i, P_0^i)}(x_0) \\ p(w_k) \simeq p_M(w_k) &= \sum_{j=0}^{M-1} \rho_k^j \mathcal{N}_{(\hat{w}_k^j, Q_k^j)}(w_k) \\ p(v_k) \simeq p_L(v_k) &= \sum_{l=0}^{L-1} \rho_k^l \mathcal{N}_{(\hat{v}_k^l, r_k^l)}(v_k) \end{aligned}$$

**Prédiction**

Si,

$$p(x_{k-1}|Y_{k-1}) \simeq p_{N_{k-1}}(x_{k-1}|Y_{k-1}) = \sum_{i=0}^{N_{k-1}-1} \rho_{k-1|k-1}^i \mathcal{N}_{(\hat{x}_{k-1|k-1}^i, P_{k-1|k-1}^i)}(x_{k-1}|Y_{k-1})$$

alors,

$$\begin{aligned} p(x_k|Y_{k-1}) &\simeq \sum_{i=0}^{N_{k-1}-1} \sum_{j=0}^{M-1} \rho_k^j \rho_{k-1|k-1}^i \mathcal{N}_{(\hat{x}_{k|k-1}^{i,j}, P_{k|k-1}^{i,j})}(x_k|Y_{k-1}) \\ &\simeq \sum_{i'=0}^{N_{k-1}M-1} \rho_{k|k-1}^{i'} \mathcal{N}_{(\hat{x}_{k|k-1}^{i'}, P_{k|k-1}^{i'})}(x_k|Y_{k-1}) \end{aligned}$$

où,  $\mathcal{N}_{(\hat{x}_{k|k-1}^{i,j}, P_{k|k-1}^{i,j})}(x_k|Y_{k-1})$  est obtenue par prédiction approchée locale (EKF ou UKF) conditionnelle aux densités  $i$  et  $j$ .

**Correction**

et,

$$\begin{aligned} p(x_k|Y_k) &\simeq \sum_{i'=0}^{N_{k-1}M-1} \sum_{l=0}^{L-1} \frac{\rho_k^l \rho_{k|k-1}^{i'} p_{i',l}(y_k|Y_{k-1})}{\sum \rho_k^l \rho_{k|k-1}^{i'} p_{i',l}(y_k|Y_{k-1})} \mathcal{N}_{(\hat{x}_{k|k}^{i',l}, P_{k|k}^{i',l})}(x_k|Y_k) \\ &\simeq \sum_{i''=0}^{N_{k-1}ML-1} \rho_{k|k}^{i''} \mathcal{N}_{(\hat{x}_{k|k}^{i''}, P_{k|k}^{i''})}(x_k|Y_k) \end{aligned}$$

où :

- $\mathcal{N}_{(\hat{x}_{k|k}^{i',l}, P_{k|k}^{i',l})}(x_k|Y_k)$  est obtenue par correction approchée locale (EKF ou UKF) conditionnelle aux densités  $i'$  et  $l$ .
- $p_{i',l}(y_k|Y_{k-1})$  terme de normalisation dans la correction approchée locale ( $i', l$ ).

Le nombre total de gaussiennes élémentaires explose avec le temps,

$$N_k = N_{k-1}ML = N_0 (ML)^k$$

Dans [Sorenson 71], deux techniques de réduction de ce nombre ont été proposées pour amoindrir l'explosion combinatoire : l'élimination des densités élémentaires à très faible poids et la fusion en une seule des gaussiennes à très fort recouvrement. Mais, l'absence d'une règle conforme en loi pour la survie des trajectoires gaussiennes candidates (confusion entre maximum de vraisemblance et minimum de variance) ont restreint l'application de ce filtre (souvent implémenté sous forme d'un banc de filtres de Kalman parallèles étendus e.g. dans [Fuxjaeger 91]). Nous montrons dans le corps du mémoire en quoi le filtrage à maximum de vraisemblance trajectorien redonne un sens à ce type de technique.

**Remarque 8.2**

*La propriété de lissage (cf section 7-2) des trajectoires linéaire-gaussiennes permet d'étendre le même principe de filtrage par somme pondérée de gaussiennes au maximum de vraisemblance trajectorielle par lissage linéaire-gaussien étendu le long de chaque trajectoire élémentaire.*

**8-1-6 Filtre à particules déterministes (cf chapitre 2)**

Le filtre à particules déterministes est une technique de résolution numérique du problème d'estimation basée sur l'interprétation du générateur des équations de filtrage non-linéaire comme celui

d'un processus de naissance et de mort dans une population de mesures élémentaires (particules de Dirac, de Gauss, etc.) pondérées par les observations.

Il procède par discrétisation de l'espace d'état selon un maillage évolutif interconnecté. Il est assimilable à un processus de sélection naturelle dans une population à ressources (capacité calculatoire) limitées ne permettant la survie que d'un nombre constant d'individus.

L'évolution, entièrement déterministe, du maillage particulière est obtenue en deux étapes. D'abord, une exploration "exhaustive" selon un maillage prédéfini de l'espace du bruit de dynamique par branchement à partir des particules existantes. Ensuite, une sélection, dans la limite des capacités de calcul autorisées, des plus pertinentes parmi les branches ainsi créées pondérées par les observations.

Cette technique particulière allie la richesse de l'approximation par somme pondérée de mesures élémentaires avec exploration "exhaustive" des possibilités d'évolution du système d'état, à la faisabilité pratique en intégrant au problème d'optimisation une contrainte de constance du nombre de densités élémentaires utilisées et en fixant des règles de survie conformes au critère d'estimation considéré. Elle complète, en ce sens, les techniques déterministes présentées ci-dessus, comme le fut la technique particulière aléatoire pour les méthodes de Monte-Carlo. En effet, ces techniques déterministes peuvent être vues comme des cas dégénérés de filtre à particules déterministes, soit par relaxation de contraintes, soit par limitation du nombre des particules et/ou des naissances.

## 8-2 Approches aléatoires

Les solutions approchées présentées ici reposent sur des interprétations statiques ou dynamiques de la loi des grands nombres.

### Theorème 8.1 Loi des grands nombres

Soit  $x_k^e$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$  distribuée selon  $P$  et  $(x_k^{e,i})_{0 \leq i \leq N-1}$   $N$  variables aléatoires indépendantes, de même loi que  $x$ .

on a alors :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_k^{e,i}) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{ps} E(f(x_k))$$

et,

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_k^{e,i}) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{L_P^2} E(f(x_k))$$

Les approches aléatoires procèdent par discrétisation de l'espace d'état par des réalisations aléatoires indépendantes a priori. Elles construisent ainsi une approximation paramétrique de dimension finie de la densité de probabilité conditionnelle et permettent, donc, une résolution calculable du problème de filtrage non-linéaire.

### 8-2-1 Approximation par somme stochastique de Riemann

L'intégrale

$$\mathcal{J}(x) = \int f(x)p(x)dx$$

peut être approchée par la moyenne numérique,

$$\mathcal{J}_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x^i)$$

avec  $x^i$   $N$  échantillons de  $x$  selon  $p(x)$ .

Dans le cas scalaire, l'intégration numérique peut être obtenue par tirage aléatoire des échantillons  $x^i$ ,

$$\mathcal{J}_N(x) = \sum_{i=0}^{N-1} f(x^i) p(x^i) (x^{i+1} - x^i)$$

avec,  $x^i$   $N$  réalisations aléatoires identiquement distribuées indépendantes et ordonnées.

L'intégrale stochastique de Riemann  $\mathcal{J}_N(x)$  ainsi définie converge également vers  $\mathcal{J}(x)$  quand  $N$  tend vers l'infini. Cette méthode n'a pas été étendue au cas, plus pertinent en filtrage non-linéaire, de variables d'état vectorielles.

### 8-2-2 Méthodes purement Monte-Carlo

Les méthodes purement Monte Carlo permettent de construire un maillage stochastique par des densités ponctuelles de l'espace d'état. Elles représentent des techniques de génération d'échantillons aléatoires à partir de densités de probabilité non-standards et souvent multi-variables connues à un terme de normalisation près.

En effet, la moyenne d'une fonction quelconque  $f(x)$ , s'écrit,

$$E(f(x)) = \int f(x) p(x) dx = \int f(x) \frac{p(x)}{q(x)} q(x) dx = E(f(x) \frac{p(x)}{q(x)})$$

pour une densité de probabilité  $q(x)$  donnée.

Si  $q(x)$  permet aisément de réaliser des tirages aléatoires, alors la moyenne  $E(f(x))$  peut être approchée par,

$$E(f(x)) \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{p(x^i)}{q(x^i)} f(x^i) = \sum_{i=0}^{N-1} \rho^i f(x^i)$$

avec  $x^i$  échantillons aléatoires selon  $q(x)$  et  $\rho^i = \frac{p(x^i)}{Nq(x^i)}$  leurs poids respectifs.

Les méthodes séquentielles de Monte Carlo, dont les premières idées furent présentées dans [Handschin 69, Handschin 70], puis dans [Zaritskii 75], permettent d'obtenir récursivement une approximation aléatoire de la densité de probabilité conditionnelle.

En effet, basées sur une adaptation dynamique de la loi des grands nombres, ces techniques procèdent par :

- mise-à-jour récursive du maillage ponctuel de l'espace d'état selon les flots de dynamique du système,
- et calcul des nouveaux poids au vue de l'observation courante.

### Equations du filtre à la Monte-Carlo

Soit :

$$p_N(X_{k-1}|Y_{k-1}) = \sum_{i=0}^{N-1} \rho_{k-1|k-1}^i \delta(X_{k-1} - \hat{X}_{k-1|k-1}^i) \simeq p(X_{k-1}|Y_{k-1})$$

approximation aléatoire de  $p(X_{k-1}|Y_{k-1})$  par somme pondérée de densités ponctuelles. La position  $\hat{X}_{k-1|k-1}^i$  et le poids normalisé  $\rho_{k-1|k-1}^i$  de chaque échantillon représentent la valeur de la densité de probabilité conditionnelle trajectorielle dans la région correspondante de l'espace des trajectoires d'état.

### Prédiction

Une approximation de  $p(X_k|Y_{k-1})$  est alors donnée par,

$$p_N(X_k|Y_{k-1}) = \sum_{i=0}^{N-1} \rho_{k|k-1}^i \delta(X_k - \hat{X}_{k|k-1}^i)$$

où :

- $\rho_{k|k-1}^i = \rho_{k-1|k-1}^i$
- $\hat{X}_{k|k-1}^i = \left[ \hat{x}_{k|k-1}^i \quad \left[ \hat{X}_{k-1|k-1}^i \right]^T \right]^T$  nouvelle trajectoire d'état, où  $\hat{x}_{k|k-1}^i = f(\hat{x}_{k-1|k-1}^i, w_{k-1}^i)$  simulation de la dynamique du système par tirage aléatoire de  $w_{k-1}^i$  selon  $p(w_{k-1})$ .

### Correction

De même, une approximation de  $p(X_k|Y_k)$  est donnée par,

$$p_N(X_k|Y_k) = \sum_{i=0}^{N-1} \rho_{k|k}^i \delta(X_k - \hat{X}_{k|k}^i)$$

où :

- $\rho_{k|k}^i = \frac{\rho_{k|k-1}^i p(y_k|x_{k|k-1}^i)}{\sum_i \rho_{k|k-1}^i p(y_k|x_{k|k-1}^i)}$  mise à jour des poids<sup>1</sup> au vue de la nouvelle observation  $y_k$ ,
- $\hat{X}_{k|k}^i = \hat{X}_{k|k-1}^i$ .

Malgré la recursivité des pondérations, l'approximation de Monte-Carlo pure et simple s'avère non-convergente<sup>2</sup>. Ceci se traduit par la concentration du poids sur un nombre de plus en plus petit de points de discrétisation au fil du temps et conduit à l'extinction des capacités d'exploration du filtre et sa divergence. Ce problème connu sous l'appellation de dégénérescence du support particulaire laissa la méthode incomplète et impraticable jusqu'à la proposition des techniques particulières avec naissance et mort de particules improprement appelées "Sequential Monte-Carlo" dans la littérature anglo-saxonne.

### 8-2-3 Filtre à particules aléatoires (cf section 9)

L'interprétation des poids particulières comme un taux de naissance et de mort et l'instauration d'un échange (redistribution) des particules entre les régions d'état au profit des plus pertinentes permettent d'améliorer l'exploration de ces dernières et garantissent une gestion mieux appropriées des ressources.

L'algorithme particulaire fut, d'abord, entièrement aléatoire :

- pour la simulation des flots dynamiques du système ; par tirage d'une réalisation du bruit de dynamique,
- pour la redistribution des particules sur leur support selon la loi multinomiale induite par les poids.

Mais très rapidement, des techniques de redistribution déterministes furent introduites permettant d'améliorer la méthode.

La suprématie de ces techniques de redistribution a motivé la revisite du principe particulaire sous un angle entièrement déterministe. Ce qui a permis de développer le filtre à particules déterministes dans le cas de variables d'état discrètes [Bensalem 02], généralisé dans les présents travaux au cas continu.

<sup>1</sup> $p(y_k|x_{k|k-1}^i)$  obtenue en appliquant l'équation (1.17).  $p(y_k|x_{k|k-1}^i) = p_v(y_k - h(x_{k|k-1}^i))$  pour un bruit de mesure additif.

<sup>2</sup>au sens de la convergence uniforme dans le temps.

## 9 Filtre à particules aléatoires interactives

### 9-1 Introduction

Cette technique, où les particules subissent naissances et morts suivant un processus branchu, fut introduite dès 1989 [Salut 89]. Elle a fait l'objet d'une série d'exposés au sein du GdR "Automatique" de 1989 [Huillet 89] à 1991 [Moral 91], ainsi que de plusieurs rapports de contrat DGA [Salut 92, Rigal 92a]. D'autres chercheurs ont développé indépendamment des idées similaires, sous d'autres appellations telles que le "bootstrap filter" de [Gordon 93], le "Monte Carlo filter" [Kitagawa 93], [Kitagawa 96] (voir [Arulampalam 02] pour cet état des choses).

Concernant les développements et applications au sein du LAAS-CNRS, on peut citer plusieurs mémoires et rapports :

- Résolution particulière en **RADAR** [Noyer 92],
- Traitement particulier des signaux **RADAR**, **SONAR** et **GPS** [Rigal 93],
- Traitement particulier du signal **LORAN** [Monin 95],
- Poursuite **RADAR** de cibles fortement manœuvrantes [Rigal 95, Noyer 96],
- Optimisation de missions de **Lutte sous-marine** [Lamole 97, Lamole 00],
- Trajectographie passive **SONAR** [Teulière 99, Teulière 00],
- Evaluation expérimentale de la poursuite **RADAR** sur données réelles [Noyer 00],
- Réception à maximum de vraisemblance en **COMMUNICATIONS RADIOMOBILES** [Bensalem 00],
- Récepteur **GPS** sous fortes contraintes dynamiques [Ziadi 01].

D'autres équipes de recherche ont proposé des développements méthodologiques et applicatives de la techniques particulières. Citons à titre d'exemples : [Musso 98], [Oudjane 99], [Oudjane 00], [Azimi-Sadjadi 00], [Boers 01], [Hue 02], [Gustafsson 02] et [Boucher 04].

Quant à la convergence du filtre, elle a été étudiée dès [Moral 94c, Moral 94d, Moral 94e]. Seules des démonstrations de la convergence en temps fini ont été apportées [Crisan 02, Moral 99]. La convergence uniforme dans le temps n'a pu être établie que sous des conditions restrictives [Moral 94a, Oudjane 00].

L'idée centrale du filtre à particules aléatoires fut d'interpréter le générateur des équations du filtrage non-linéaire comme celui d'un processus de branchement d'une population de particules dépendant des observations. Ce processus, procédant par naissance et mort de particules selon leurs poids, se concentre a posteriori sur les régions les plus pertinentes de l'espace d'état. La structure la plus utile, à nombre stable de particules pondérées interactives, fait du procédé un réseau fini couplé.

### 9-2 Principes du Filtre particulaire aléatoire

Les techniques particulières utilisent un maillage évolutif interdépendant de l'espace d'état pour l'approximation finie de la densité de probabilité conditionnelle.

A chaque itération, le maillage particulaire évolue par simulation aléatoire des flots du système et propagation des densités élémentaires, soumises à des réalisations aléatoires des bruits de dynamique  $w$ , à travers l'équation de transition et à leurs pondérations au vu des nouvelles observations.

Régulièrement, les particules sont redistribuées sur leurs supports branchus. Le principe de base est d'éliminer les trajectoires défavorablement pondérées au profit des plus représentatives, favorisant ainsi les régions d'état les plus pertinentes. Cette procédure assure une approximation d'autant meilleure que  $N$  (le nombre de particules) augmente. Notons qu'un tel procédé rend les particules dépendantes au cours du temps, contrairement à l'appellation abusive "Monte-Carlo" qui désigne par principe des réalisations indépendantes. Plusieurs techniques de redistribution ont été envisagées dans la littérature particulaire.

Développés autour de l'interprétation dynamique de la loi des grands nombres, les premiers algorithmes particuliers utilisaient exclusivement les mesures ponctuelles de *Dirac* pour approcher la densité de probabilité conditionnelle de l'état. L'extension dénommée *Kalman Conditionnel* [Rigal 93, Noyer 96], ou filtre à particules de *Dirac-Gauss* [Bensalem 02], a été développée pour les problèmes conditionnellement linéaires-Gaussiens. Elle fut connue et exposée dès 1991, dans le cadre du Groupe Stochastique du GdR "Automatique". Cette technique met en œuvre une approximation par somme de mesures de *Dirac-Gauss*. D'autres algorithmes similaires ont été proposés sous d'autres appellations : Roa-Blackwellised/marginalized particle filter [Casella 96] et mixture Kalman filter [Chen 00].

L'amélioration des performances et la réduction du coût algorithmique apportées par l'alliance de l'interprétation particulaire des équations de filtrage non-linéaire et des performances locales des filtres de *Kalman* ont motivé l'extension du principe des filtres de *Kalman conditionnels* aux systèmes conditionnellement linéarisables [Ziadi 01], puis aux systèmes non-linéaires dans le cas général. Il s'agit du filtre à particules de *Gauss* étendues [Teulière 00] [Bensalem 02], où chaque particule gaussienne, décrite par ses deux premiers moments, est porteuse d'un filtre linéaire-gaussien étendu local conditionnel à sa position dans l'espace d'état. D'autres techniques basées sur le même principe de maillage gaussien de l'espace d'état ont été proposées dans [Kotecha 03] et [van der Merwe 00]. Ce dernier utilise des UKF (unscented Kalman filter) conditionnels pour l'évolution locale des particules gaussiennes.

### 9-3 Équations du filtre particulaire aléatoire

Soit :

$$p_N(X_{k-1}|Y_{k-1}) = \sum_{i=1}^N \rho_{k-1|k-1}^i p_i(X_{k-1}|Y_{k-1})$$

approximation aléatoire de  $p(X_{k-1}|Y_{k-1})$  par une somme pondérée de densités élémentaires  $p_i(X_{k-1}|Y_{k-1})$ , de poids normalisé  $\rho_{k-1|k-1}^i$ , et localisée dans l'espace d'état par sa moyenne  $\hat{X}_{k-1|k-1}^i$ .

#### Prédiction

Une approximation de  $p(X_k|Y_{k-1})$  est alors donnée par,

$$\begin{aligned} p_N(X_k|Y_{k-1}) &= p(x_k|x_{k-1})p_N(X_{k-1}|Y_{k-1}) \\ &= \sum_{i=1}^N \rho_{k-1|k-1}^i p(x_k|x_{k-1})p_i(X_{k-1}|Y_{k-1}) \\ &= \sum_{i=1}^N \rho_{k|k-1}^i p_i(X_k|Y_{k-1}) \end{aligned}$$

où,

- $\rho_{k|k-1}^i = \rho_{k-1|k-1}^i$
- $p_i(X_k|Y_{k-1}) \simeq p(x_k|x_{k-1})p_i(X_{k-1}|Y_{k-1})$ , localisé dans l'espace d'état par sa moyenne  $\hat{X}_{k|k-1}^i$ , prédiction locale de  $p_i(X_{k-1}|Y_{k-1})$  simulée par l'affectation d'une réalisation aléatoire de  $w_{k-1}^i$  selon  $p(w_{k-1})$ .

### Correction

De même, une approximation de  $p(X_k|Y_k)$  est donnée par,

$$\begin{aligned}
 p_N(X_k|Y_k) &= \frac{p(y_k|x_k)p_N(X_k|Y_{k-1})}{\int p(y_k|x_k)p_N(X_k|Y_{k-1})dX_k} \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{\rho_{k|k-1}^i \int p(y_k|x_k)p_i(X_k|Y_{k-1})dX_k}{\sum_{i=1}^N \rho_{k|k-1}^i \int p(y_k|x_k)p_i(X_k|Y_{k-1})dX_k} \frac{p(y_k|x_k)p_i(X_k|Y_{k-1})}{\int p(y_k|x_k)p_i(X_k|Y_{k-1})dX_k} \\
 &= \sum_{i=1}^N \rho_{k|k}^i p_i(X_k|Y_k)
 \end{aligned}$$

où,

- $\rho_{k|k}^i = \frac{\rho_{k|k-1}^i p_i(y_k|Y_{k-1})}{\sum_i \rho_{k|k-1}^i p_i(y_k|Y_{k-1})}$  mise à jour des poids au vue de la nouvelle observation  $y_k$ ,
- $p_i(X_k|Y_k) = \frac{p(y_k|x_k)p_i(X_k|Y_{k-1})}{p_i(y_k|Y_{k-1})}$  correction locale conditionnelle à la particule  $i$ .

### Remarque 9.1

Les équations du filtre particulaire peuvent être réécrites pour les densités de probabilités marginales  $p(x_k|Y_k)$ . Elles correspondent, dans ce cas, à celle de l'évolution des probabilités marginales  $p_i(x_k|Y_k) = \int p_i(X_k|Y_k)dX_{k-1}$ .

## 9-4 Algorithme du Filtre Particulaire aléatoire

1. **Initialisation** : Tirage du support particulaire selon la loi a priori  $p_0^x$

$$i = 1, \dots, N \begin{cases} \hat{x}_0^i = E[p_i(x_0)] \sim p_0^x \\ \rho_0^i = \frac{1}{N} \end{cases}$$

2. **Evolution** : Exploration a priori par tirage aléatoire du bruit de dynamique selon  $p(w_k)$  :

$$i = 1, \dots, N \quad \hat{w}_k^i = E[p_i(w_k)] \sim p(w_k)$$

- Prédiction locale selon la trajectoire nominale d'état ( $\hat{X}_{k-1|k-1}^i, \hat{w}_k^i$ ) :

$$\begin{aligned}
 p_i(X_k|Y_{k-1}) &\simeq p_i(x_k|x_{k-1})p_i(X_{k-1}|Y_{k-1}) \\
 \hat{X}_{k|k-1}^i &= E[p_i(X_k|Y_{k-1})]
 \end{aligned}$$

- Correction locale selon la trajectoire nominale d'état ( $\hat{X}_{k|k-1}^i$ ) :

$$\begin{aligned}
 p_i(y_k|Y_{k-1}) &= \int p(y_k|x_k)p_i(X_k|Y_{k-1})dX_k \\
 p_i(X_k|Y_k) &= \frac{p(y_k|x_k)p_i(X_k|Y_{k-1})}{p_i(y_k|Y_{k-1})} \\
 \hat{X}_{k|k}^i &= E[p_i(X_k|Y_k)]
 \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup> $p_i(y_k|Y_{k-1}) = \int p(y_k|x_k)p_i(X_k|Y_{k-1})dX_k$  terme de normalisation dans la correction locale conditionnelle à la particule  $i$ .



3. **Pondération** : Affectation des nouveaux poids normalisés aux particules :

$$i = 1, \dots, N \quad \rho_k^i = \frac{\rho_{k-1|k-1}^i p_i(y_k | Y_{k-1})}{\sum_i \rho_{k-1|k-1}^i p_i(y_k | Y_{k-1})}$$

4. **Estimation** : Les premiers travaux en filtrage particulaire aléatoire furent motivés par l'estimation à minimum de variance. L'estimée, dans ce cas, est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k} &= \int x_k p(x_k | Y_k) dx_k \\ &\simeq \int x_k \left( \int \sum_{i=1}^N \rho_{k|k}^i p_i(X_k | Y_k) dX_{k-1} \right) dx_k \\ &\simeq \sum_{i=1}^N \rho_{k|k}^i \left( \int x_k p_i(x_k | Y_k) dx_k \right) \\ &\simeq \sum_{i=1}^N \rho_{k|k}^i \hat{x}_{k|k}^i \end{aligned}$$

Somme pondérée des moyennes locales conditionnelles aux particules.

5. **Redistribution** : Elle est réalisée selon une des procédures exposées en section 9-6. Le déclenchement de manière adaptative de la redistribution, par un test de dégénérescence du support particulaire, permet de pallier l'insuffisance de la répartition particulaire.

## 9-5 Densités élémentaires en filtrage particulaire

### 9-5-1 Particules de Dirac

Dans le cas des mesures de Dirac, une particule  $i$  à l'instant  $k$  est entièrement définie par sa moyenne  $\hat{X}_{k|k}^i$ .

$$p_i(X_k | Y_k) = \delta(X_k - \hat{X}_{k|k}^i)$$

avec  $\delta(\cdot)$  mesure de Dirac définie par :

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

A chaque particule, est associé son poids (probabilité)  $\rho_{k|k}^i$ .

Les équations du filtrage local conditionnel à la particule  $i$  sont alors celles relatives à l'évolution de la moyenne  $\hat{X}_{k|k}^i$  et du poids  $\rho_{k|k}^i$  de chaque particule  $i$ , étant donnée la réalisation aléatoire du bruit de dynamique correspondant  $\hat{w}_k^i$  et la nouvelle observation  $y_k$  :

– **Prédiction**

$$\hat{X}_{k|k-1}^i = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k-1}^i \\ \hat{X}_{k-1|k-1}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\hat{x}_{k-1|k-1}^i, \hat{w}_k^i) \\ \hat{X}_{k-1|k-1}^i \end{bmatrix}$$

– **Correction**

$$\begin{aligned} p_i(y_k | Y_{k-1}) &= \int p(y_k | x_k) p_i(X_k | Y_{k-1}) dX_k = p(y_k | \hat{x}_{k|k-1}^i) \\ \hat{X}_{k|k}^i &= \hat{X}_{k|k-1}^i \end{aligned}$$

– **Pondération**

$$\rho_{k|k}^i = \frac{\rho_{k-1|k-1}^i p(y_k | \hat{x}_{k|k-1}^i)}{\sum_i \rho_{k-1|k-1}^i p(y_k | \hat{x}_{k|k-1}^i)}$$

**Remarque 9.2**

- Les mesures ponctuelles de Dirac permettent un calcul simplifié des équations de filtrage. Cette simplicité des équations est pénalisée par l'absence de correction locale conditionnelle aux observations, d'où le besoin d'un nombre élevé de particules pour un filtrage "optimal", motivation originelle de l'utilisation de particules diffuses (de Dirac-Gauss ou de Gauss).
- $p(y_k | \hat{x}_{k|k-1}^i)$  est évalué à partir de la connaissance de la densité de probabilité du bruit  $p(v_k)$  et de l'équation d'observation  $h(x_k, v_k)$ . Pour un bruit de mesure additif gaussien :

$$\begin{aligned} p(y_k | \hat{x}_{k|k-1}^i) &= \mathcal{N}_{R_k}(y_k - h(\hat{x}_{k|k-1}^i)) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \sqrt{|R_k|}} e^{-\frac{1}{2}(y_k - h(\hat{x}_{k|k-1}^i))^T R_k^{-1} (y_k - h(\hat{x}_{k|k-1}^i))} \end{aligned}$$

où  $\mathcal{N}_{R_k}(\cdot)$  densité gaussienne de moyenne nulle et de covariance  $R_k$ .

### 9-5-2 Particules de Dirac-Gauss

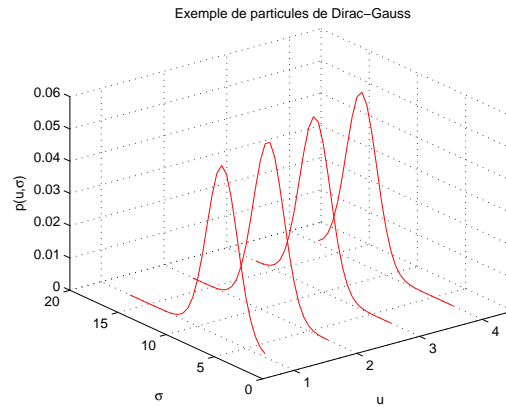


FIG. I.1.1 – Exemple de particules de Dirac-Gauss

Soit  $x_k$  une variable d'état vectorielle s'écrivant sous la forme,

$$x_k = \begin{pmatrix} u_k \\ \sigma_k \end{pmatrix}$$

avec  $\sigma$  composante d'état continue et  $u$  composante continue/discrete<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Les notations qui suivent, représentent le cas où  $u$  est un paramètre continu. Elles peuvent être adaptées, au cas discret, en remplaçant l'équation de dynamique par la machine à état décrivant l'évolution de  $u$  et les positions des particules selon cet axe par la valeur que prend  $u$  dans l'alphabet correspondant.

On appelle mesure de *Dirac-Gauss* la densité de probabilité définie par :

$$p(x_k) = p \begin{pmatrix} u_k \\ \sigma_k \end{pmatrix} = \delta(u_k - \hat{u}_k) \mathcal{N}_{P_{\sigma_k}}(\sigma_k - \hat{\sigma}_k) \quad (1.33)$$

où  $\delta(\cdot)$  est une mesure de *Dirac* et  $\mathcal{N}_{P_{\sigma_k}}(\cdot)$  est une mesure de *Gauss* de moyenne nulle et de variance  $P_{\sigma_k}$ .

Les densités de *Dirac-Gauss* ont été introduites en filtrage particulière pour les systèmes conditionnellement linéaires, où certaines des variables d'état  $\sigma_k$  sont décrites conditionnellement aux autres ( $u_k$ ) par un modèle linéaire-gaussien. En effet, dans ce cas, les variables  $\sigma_k$  sont gaussiennes conditionnellement aux variables  $u_k$ . Il est alors possible d'utiliser une combinaison de résolution particulière et de filtrage de Kalman. Cette technique permet de réduire significativement le coût algorithmique de la technique particulière [Karlsson 04]. Les systèmes répondant à ces spécifications sont du type :

$$\begin{cases} u_{k+1} = f_k(u_k, \omega_k) \\ \sigma_{k+1} = g_k(u_k) \sigma_k + \pi_k \\ y_k = h_k(u_k) \sigma_k + v_k \end{cases} \quad (1.34)$$

où  $\pi_k$  et  $v_k$  sont des bruits blancs gaussiens de variances respectives  $Q_k$  et  $R_k$ , et  $\omega_k$  un bruit de densité de probabilité connue indépendant des deux autres.

La dynamique et l'observation des composantes  $(\sigma, \pi)$  de l'état étant linéaire conditionnellement aux autres composantes, le filtre de Kalman conditionnel est optimal dans ce cas là (au sens du maximum de vraisemblance aussi bien qu'en variance minimum). Il suffit donc d'adjoindre à chacune des particules, un filtre de Kalman conditionné par le reste de l'état de la particule pour résoudre ce type de problème. Une particule se scinde donc en deux :

- Une mesure ponctuelle de type Dirac, dont le support suit une trajectoire  $(u_0^i, \Omega_k^i)$ ,  $\Omega_k^i = \{\omega_0^i, \dots, \omega_k^i\}$ .
- Une mesure étendue de type Gauss, conditionnelle à  $i$ . Sa moyenne et sa variance suivent les trajectoires décrites par un filtre de Kalman.

L'évolution de la partie ponctuelle  $u_k^i$  se base toujours sur le tirage aléatoire du bruit de dynamique  $\omega_k$ . L'évolution du Kalman conditionnel est quasi-identique aux équations classiques, conditionnellement à  $i$  :

– **Prédiction :**

– *Partie ponctuelle*

$$\hat{u}_{k|k-1}^i = f_k(\hat{u}_{k-1|k-1}^i, \hat{\omega}_k^i)$$

avec,

$$\hat{\omega}_k^i = \text{résultat du tirage aléatoire de } \omega_k \text{ selon } p(\omega)$$

– *Partie diffuse* : Similaire aux équations du filtre de Kalman [Kalman 60]

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{k|k-1}^i = g_k(\hat{u}_{k|k-1}^i) \hat{\sigma}_{k-1|k-1}^i \\ P_{k|k-1}^i = g_k(\hat{u}_{k|k-1}^i) P_{k-1|k-1}^i g_k(\hat{u}_{k|k-1}^i)^T + Q_k \end{cases}$$

– **correction**

– *Terme de normalisation local*

$$\begin{aligned} p_i(y_k | Y_{k-1}) &= \iint p(y_k | u_k, \sigma_k) \delta(u_k - \hat{u}_{k|k-1}^i) \mathcal{N}_{P_{k|k-1}}(\sigma_k - \hat{\sigma}_{k|k-1}^i) du_k d\sigma_k \\ &= \int p(y_k | \hat{u}_{k|k-1}^i, \sigma_k) \mathcal{N}_{P_{k|k-1}}(\sigma_k - \hat{\sigma}_{k|k-1}^i) d\sigma_k \\ &= \mathcal{N}_{h(\hat{u}_{k|k-1}^i) P_{k|k-1} h(\hat{u}_{k|k-1}^i)^T + R_k}(y_k - h(\hat{u}_{k|k-1}^i) \hat{\sigma}_{k|k-1}^i) \end{aligned}$$

– *Partie ponctuelle*

$$\widehat{u}_{k|k}^i = \widehat{u}_{k|k-1}^i$$

– *Partie diffuse* : Similaire aux équations du filtre de Kalman [Kalman 60]

$$\begin{cases} K_k^i = P_{k|k-1}^i h_k(\widehat{u}_{k|k}^i) (h_k(\widehat{u}_{k|k}^i) P_{k|k-1}^i h_k(\widehat{u}_{k|k}^i)^T + R_k)^{-1} \\ \widehat{\sigma}_{k|k}^i = \widehat{\sigma}_{k|k-1}^i + K_k^i (y_k - h(\widehat{u}_{k|k}^i) \widehat{\sigma}_{k|k-1}^i) \\ P_{k|k}^i = P_{k|k-1}^i - K_k^i h(\widehat{u}_{k|k}^i) P_{k|k-1}^i \end{cases}$$

– **Pondération**

$$\rho_{k|k}^i = \frac{\rho_{k-1|k-1}^i \mathcal{N}_{h(\widehat{u}_{k|k-1}^i) P_{k|k-1}^i h(\widehat{u}_{k|k-1}^i)^T + R_k} (y_k - h(\widehat{u}_{k|k-1}^i) \widehat{\sigma}_{k|k-1}^i)}{\sum_i \rho_{k-1|k-1}^i \mathcal{N}_{h(\widehat{u}_{k|k-1}^i) P_{k|k-1}^i h(\widehat{u}_{k|k-1}^i)^T + R_k} (y_k - h(\widehat{u}_{k|k-1}^i) \widehat{\sigma}_{k|k-1}^i)}$$

Les équations données ici décrivent l'évolution du point terminal de la trajectoire particulière de Dirac-Gauss. La trajectoire entière s'obtient par lissage de Kalman conditionnel à partir des moments marginaux  $\left( \widehat{u}_{\tau|\tau}^i, (\widehat{\sigma}_{\tau|\tau}^i, P_{\tau|\tau}^i) \right)_{\tau=0}^k$ .

Le filtre à particule de Dirac-Gauss a été étendu au cas des systèmes conditionnellement linéarisables où les équations d'état peuvent être décrites finement par des approximations linéaires-gaussiennes conditionnelles [Ziadi 01].

### 9-5-3 Particules de Gauss

La discrétisation d'une densité de probabilité par des mesures de Dirac (approximation canonique), à une précision donnée, peut nécessiter un nombre irréaliste de particules. Le meilleur exemple est le cas linéaire-gaussien, globalement résoluble par deux paramètres plus économiques. C'est pour pallier cette difficulté qu'a été développé le "Filtrage à particules gaussiennes". La probabilité n'est plus décomposée en particules ponctuelles comme mesures de Dirac  $\delta(X_k - \widehat{X}_{k|k}^i)$ , mais en particules étendues comme mesures gaussiennes non normées, chacune de poids  $\rho_{k|k}^i$ . Chaque gaussienne trajectorielle peut être obtenue, comme dans le cas linéaire 7-2, par lissage de toutes les gaussiennes marginales le long de la trajectoire concernée<sup>5</sup> :

$$\mathcal{N}_{\mathcal{P}_{k|k}^i} (X_k - \widehat{X}_{k|k}^i) = \mathcal{LLE}(\{ \mathcal{N}_{P_{\tau|\tau}^i} (x_\tau - \widehat{x}_{\tau|\tau}^i) \}_{\tau=0}^k)$$

La répartition initiale en particules est ainsi plus proche d'un "pavage" que d'un échantillonnage point par point.

Les équations de dynamique et d'observation des systèmes à temps discret auxquels cette technique est applicable s'écrivent sous forme générique :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_k(x_k, w_k) \\ y_k = h_k(x_k) + v_k \end{cases} \quad (1.35)$$

où  $v_k$  est un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance  $R_k$  et  $w_k$  est un bruit de densité quelconque. Il est nécessaire que les fonctions  $f_k$  et  $h_k$  de dynamique et d'observation soient différentiables (afin que la linéarisation locale autour de la particule soit valide).

<sup>5</sup>  $\mathcal{LLE}$  : Lissage Linéaire-gaussien Etendu.

La structure de l'algorithme reste identique au cas ponctuel. Toutefois, ici une trajectoire correspond à celle d'un filtre de Kalman étendu calculée autour de la trajectoire nominale  $(\hat{x}_0^i, (\hat{w}_k^i)_{\tau=0}^k)$  obtenue par tirage aléatoire des bruits de dynamique  $w_\tau$ . Le principal avantage réside dans les performances connues des filtres de Kalman étendus locaux.

Les équations du filtrage local conditionnel à la particule  $i$  sont quasi-identiques aux équations classiques d'évolution du Kalman étendu :

– **Prédiction** :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k|k-1}^i = f_k(\hat{x}_{k-1|k-1}^i, \hat{w}_k^i) \\ P_{k|k-1}^i = F_{x_k}^i P_{k-1|k-1}^i F_{x_k}^{i\,T} + F_{w_k}^i q_k^i F_{w_k}^{i\,T} \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{w}_k^i &= E[p_i(\omega_k)] \sim p(\omega_k) \\ F_{x_k}^i &= \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_{k-1|k-1}^i, \hat{w}_k^i) \quad \text{jacobien de } f \text{ par rapport à } x \\ F_{w_k}^i &= \frac{\partial f}{\partial w}(\hat{x}_{k-1|k-1}^i, \hat{w}_k^i) \quad \text{jacobien de } f \text{ par rapport à } w \end{aligned}$$

et  $q_k^i$  variance élémentaire de la densité gaussienne autour de  $\hat{w}_k^i$  dans la discrétisation de  $w_k$ .

– **Correction**

– *Terme de normalisation local*

$$p_i(y_k | Y_{k-1}) = \mathcal{N}_{H_{x_k}^i P_{k|k-1}^i H_{x_k}^{i\,T} + R_k}(y_k - h(\hat{x}_{k|k-1}^i))$$

– *Moment de la gaussienne*

$$\begin{cases} K_k^i = P_{k|k-1}^i H_{x_k}^i (H_{x_k}^i P_{k|k-1}^i H_{x_k}^{i\,T} + R_k)^{-1} \\ \hat{x}_{k|k}^i = \hat{x}_{k|k-1}^i + K_k^i (y_k - h(\hat{x}_{k|k-1}^i)) \\ P_{k|k}^i = P_{k|k-1}^i - K_k^i H_{x_k}^i P_{k|k-1}^i \end{cases}$$

avec :

$$H_{x_k}^i = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_{k|k-1}^i) \quad \text{jacobien de } h \text{ par rapport à } x$$

– **Pondération**

$$\rho_{k|k}^i = \frac{\rho_{k-1|k-1}^i \mathcal{N}_{H_{x_k}^i P_{k|k-1}^i H_{x_k}^{i\,T} + R_k}(y_k - h(\hat{x}_{k|k-1}^i))}{\sum_j \rho_{k-1|k-1}^j \mathcal{N}_{H_{x_k}^j P_{k|k-1}^j H_{x_k}^{j\,T} + R_k}(y_k - h(\hat{x}_{k|k-1}^j))}$$

Cette approche assure une meilleure couverture de l'espace d'état en comparaison avec la représentation ponctuelle. En pratique, cela permet une estimation de précision équivalente pour un nombre de particules plus réduit et, dans la phase transitoire, une convergence plus rapide de l'estimateur due à la mobilité propre de chacune des particules.

## 9-6 Redistribution de particules

### 9-6-1 Dégénérescence du support particulaire

En l'absence de redistribution et sous l'effet dispersif des tirages aléatoires du bruit de dynamique, la capacité d'exploration de l'espace des trajectoires du filtre (concentration des particules dans les différentes régions d'état) diminue jusqu'à l'extinction. Ce fût le cas pour les techniques séquentielles de Monte Carlo [Handschin 70] [Zaritskii 75].

Cette dégénérescence du support se traduit par l'appauvrissement en particules des régions pertinentes de l'espace d'état et donc par la convergence de tous les poids particuliers vers zéro, à l'exception d'un seul qui recueille la masse totale.

L'interprétation des poids particuliers  $\rho_i$  comme la probabilité d'exploration de sa position  $\hat{x}_i$  dans l'espace d'état a conduit naturellement au processus de redistribution (naissance et mort des particules à  $N$  constant). Ce procédé consiste à faire naître des particules dans les positions particulières massives (de poids élevés) au détriment des plus faibles. Il optimise ainsi les capacités d'exploration des régions les plus vraisemblables.

### 9-6-2 Redistribution en loi par tirage aléatoire

Le support particulaire après redistribution est obtenu par affectation aléatoire des  $N$  particules aux  $N$  trajectoires  $(x_0^i, W_k^i)$  pondérées conformément aux probabilités respectives, c'est à dire selon la loi multinomiale. On rappelle que cela s'obtient par tirage aléatoire d'une variable  $\mu$  uniforme sur  $[0, 1]$ , la particule  $j$  sélectionnée étant celle telle que :

$$Z_{j-1} \leq \mu \leq Z_j \text{ où } Z_j = \sum_{i=1}^j \rho_k^i \quad (1.36)$$

Cette procédure revient à inverser la fonction de répartition et à effectuer les tirages uniformes correspondants. Après redistribution, tous les poids sont réinitialisés à  $\frac{1}{N}$ .

Signalons qu'il existe des méthodes de génération de variables uniformes ordonnées [Devroye 86] permettant de réduire le coût algorithmique de cette redistribution.

### 9-6-3 Redistribution déterministe à maximum de vraisemblance

Les  $(n_i)_{i=1}^N$  sont distribués selon la loi multinomiale à nombres égaux de tirages et de valeurs possibles :

$$p(n_1, n_2, \dots, n_N) = N! \prod_{i=1}^N \frac{(\rho_k^i)^{n_i}}{n_i!} \quad (1.37)$$

avec :

$$\sum_{i=1}^N n_i = N \text{ et } \sum_{i=1}^N \rho_k^i = 1 \quad (1.38)$$

Le problème de redistribution peut être optimisé de façon déterministe à maximum de vraisemblance, soit :

$$\max_{(n_i)_{i=1}^N} p(n_1, n_2, \dots, n_N) = \max_{(n_i)_{i=1}^N} N! \prod_{i=1}^N \frac{(\rho_k^i)^{n_i}}{n_i!} \quad (1.39)$$

avec les mêmes contraintes. Il est aisé de vérifier que la redistribution à maximum de vraisemblance conserve l'ordre des vraisemblances des  $i$ , c'est à dire :

$$\forall i, j, \rho_k^i \leq \rho_k^j \implies n_i \leq n_j$$

et donc, celui de la pertinence des régions d'état correspondantes.

On notera que les modes de loi multinomiale ne sont pas d'expression simple. Des solutions algorithmiques exactes [Gall 00] ou approchées [Finucan 64] permettent de résoudre ce problème.

#### 9-6-4 Redistribution déterministe à minimum de variance

$$(\bar{n}_i)_{i=1}^N = \min_{\substack{(\tilde{n}_i)_{i=1}^N \in \mathbf{N}^N \\ \sum_{i=1}^N \tilde{n}_i = N}} E_{p((n_i)_{i=1}^N)} [((n_i)_{i=1}^N - (\tilde{n}_i)_{i=1}^N) ((n_i)_{i=1}^N - (\tilde{n}_i)_{i=1}^N)^T]$$

La variance d'une solution  $(\tilde{n}_i)_{i=1}^N$  est proportionnelle à sa déviation par rapport à la moyenne  $(\hat{n}_i)_{i=1}^N$  donnée par :

$$d((\tilde{n}_i)_{i=1}^N, (\hat{n}_i)_{i=1}^N) = \sum_{i=1}^N (\tilde{n}_i - \hat{n}_i)^2$$

L'estimée  $(\bar{n}_i)_{i=1}^N$  est donc celle qui minimise  $d((\bar{n}_i)_{i=1}^N, (\hat{n}_i)_{i=1}^N)$ . Elle appartient au voisinage immédiat de  $(\hat{n}_i)_{i=1}^N$  dans l'ensemble  $\{(n_i)_{i=1}^N \in \mathbf{N}^N, \sum_{i=1}^N n_i = N\}$

Rappelons que les moyennes de la distribution multinomiale sont données par

$$\hat{n}_i = N\rho_k^i$$

Le critère d'optimisation est alors donnée par :

$$\min_{(n_i)_{i=1}^N} \sum_{i=1}^N (n_i - N\rho_k^i)^2$$

Soit :

$$N\rho_k^i = e_i + f_i$$

où  $e_i$  est la partie entière de  $N\rho_k^i$  et  $f_i$  est la partie fractionnaire ou résidu, et

$$\delta_i = n_i - e_i$$

Le critère d'optimisation se ré-écrit,

$$\min_{(n_i)_{i=1}^N} \sum_{i=1}^N (f_i - \delta_i)^2$$

Par de simples calculs, il est aisé de montrer que l'optimum vérifie

$$\begin{cases} 0 \leq \delta_i \leq 1 \\ f_i \leq f_j \implies \delta_i \leq \delta_j \\ \rho_k^i \leq \rho_k^j \implies n_i \leq n_j \end{cases}$$

Il est possible de travailler sur la distribution des résidus  $f_i$ . Après affectation des parties entières  $e_i$ , le nombre de particules restant est distribué par résidus décroissants.

Cette procédure a été utilisée dans [Rigal 95] et [Monin 95] (une version modifiée), elle y est présentée comme une approximation de la redistribution déterministe à maximum de vraisemblance.

Notons, par ailleurs, que la redistribution déterministe en parties entières par résidus décroissants correspond, dans le cas de support particulaire initial disjointif, à la solution minimisant la norme d'erreur de probabilité :

$$\begin{aligned} \min_{(n_i)_{i=1}^N} \|p(x_k|(n_i), Y_k) - p(x_k|(\rho_i), Y_k)\|^2 &= \min_{(n_i)_{i=1}^N} \sum_{i=1}^N \left( \rho_k^i - \frac{n_i}{N} \right)^2 \\ &= \min_{(n_i)_{i=1}^N} \sum_{i=1}^N (N\rho_k^i - n_i)^2 \end{aligned}$$

### 9-6-5 Intermittence des redistributions

Les techniques de redistributions déterministes citées ci-haut permettent d'adapter le maillage particulaire aux informations a posteriori sur l'état du système. Elles ne déclenchent d'échange de particules entre les différents points de discrétisation de l'espace d'état que si la répartition des poids sur le support particulaire le justifie. Ce n'est pas le cas de la redistribution aléatoire.

Pour  $N$  fini, une redistribution aléatoire systématique à chaque itération est néfaste à cause de l'introduction, par les aléas du tirage, de bruit externe dans la représentation particulaire. En pratique, la redistribution est déclenchée de manière adaptative par un test de dégénérescence de la représentation. Deux indicateurs heuristiques sont utilisables :

- Seuil sur les poids : il suffit d'examiner le nombre de particules de poids inférieur à un certain seuil. Cet indicateur nécessite de fixer deux seuils (le nombre de particules et le poids).
- Nombre de particules efficaces [Liu 95] : la dégénérescence de la représentation augmente avec la variance des poids. Dans le cas idéal, tous les poids sont égaux à  $\frac{1}{N}$  et la variance est nulle. Soit le coefficient de variation des poids défini par :

$$C_\rho^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (N\rho_k^i - 1)^2 \quad (1.40)$$

Quand  $N$  est grand,  $C_\rho^2$  est une bonne approximation de la variance des poids. Un indicateur heuristique de la dégénérescence du support est alors défini par le nombre de particules efficace :

$$N_{eff} = \frac{N}{1 + C_\rho^2} \approx \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\rho_k^i)^2} \quad (1.41)$$

Notons, enfin, que ces tests heuristiques de dégénérescence peuvent, aussi, être adoptés avec les redistributions déterministes dans un but d'économie du coût algorithmique de ces procédés tant que la dégénérescence n'est pas prononcée.

## 9-7 Extension à l'estimation à maximum de vraisemblance

### 9-7-1 Introduction :

La première application du filtrage particulaire à l'estimation à maximum de vraisemblance a été proposée dans [Moral 94b]. Elle est basée sur l'algorithme particulaire avec régularisation des poids. L'extension au maximum de vraisemblance des méthodes particulières aléatoires avec redistribution des particules a été étudiée dans [Bensalem 99], [Bensalem 00], [Teulière 00] ainsi que dans [Punskaya 01]. D'autres auteurs ont proposé des techniques similaires. Une synthèse d'une partie de ces techniques est resumée dans [Briers 04].



Dans ce qui suit, nous décrivons le filtre particulaire aléatoire à maximum de vraisemblance trajectorielle tel qu'il a été synthétisé dans [Bensalem 02].

Notons que la technique particulaire décrite jusque là suffit pour déterminer une approximation particulaire de l'estimée à maximum de vraisemblance trajectorielle/marginale. En effet, cette technique permet de construire une approximation discrète de la probabilité conditionnelle. Or, par définition,

$$\arg \max_{X_k} V(X_k|Y_k) = \arg \max_{X_k} \log(P(X_k|Y_k))$$

qui n'est autre que  $\arg \max_{X_k} P(X_k|Y_k)$ .

Une approximation de l'estimée à maximum de vraisemblance trajectorielle<sup>6</sup> est donnée par,

$$\arg \max_{X_k^i} V_N(X_k^i|Y_k) = \arg \max_{X_k^i} P_N(X_k^i|Y_k)$$

Notons, cependant, qu'en raison de la redondance du support particulaire, notamment à l'issue des redistributions, la probabilité conditionnelle de la particule  $i$  n'est pas entièrement donnée par son poids :

$$\begin{aligned} P_N(X_k^i|Y_k) &= \sum_{j=1}^N \rho_j \delta(X_k^i - X_k^j) \\ &\neq \rho_i \end{aligned}$$

mais par la somme des poids de toutes les particules partageant sa position dans l'espace d'état :

$$P_N(X_k^i|Y_k) = \sum_{\substack{j=1 \\ X_k^j = X_k^i}}^N \rho_j$$

L'application directe de la technique aléatoire au maximum de vraisemblance reviendrait, donc, à calculer l'approximation de la vraisemblance trajectorielle/marginale de chaque position particulaire, à partir de la distribution des poids, et de retourner la plus vraisemblable.

Dans le cas du maximum de vraisemblance trajectorielle, la vraisemblance, à un instant  $k$  donné, d'une particule  $i$  définie par la trajectoire  $(x_0^i, W_k^i = \{\hat{w}_\tau^i, \tau = 0, \dots, k\})$  est :

$$V_k^i = \log(p(x_0^i)) + \sum_{\tau=0}^k [\log(p(\hat{w}_\tau^i)) + \log(P(y_\tau|\hat{x}_\tau^i))]$$

Elle peut être calculée récursivement par :

$$V_k^i = V_{k-1}^i + \log(p(\hat{w}_k^i)) + \log(p(y_k|\hat{x}_k^i))$$

en marge de l'algorithme particulaire.

De plus, les mêmes techniques de redistribution envisagées dans le contexte à minimum de variance restent valables pour le maximum de vraisemblance.

L'algorithme particulaire à maximum de vraisemblance trajectorielle est, alors, quasi-identique à celui à minimum de variance.

---

<sup>6</sup>Le maximum de vraisemblance marginale s'obtient par une formule similaire utilisant l'approximation de la probabilité conditionnelle  $P_N(x_k|Y_k)$ .

**9-7-2 Algorithme particulaire aléatoire à maximum de vraisemblance trajectorielle**

1. **Initialisation** : Tirage du support particulaire selon la loi a priori  $p(x_0)$

$$i = 1, \dots, N \left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_0^i = E[p_i(x_0)] \sim p(x_0) \\ \rho_0^i = \frac{1}{N} \\ V_0^i = \log(p(x_0^i)) \end{array} \right.$$

2. **Evolution** : Identique à l'algorithme en minimum de variance.

Exploration a priori par tirage aléatoire du bruit de dynamique selon  $p(w_k)$ .

– Prédiction locale selon la trajectoire nominale d'état  $(\hat{X}_{k-1|k-1}^i, \hat{w}_k^i)$  :

– Correction locale selon la trajectoire nominale d'état  $(\hat{X}_{k|k-1}^i)$ .

3. **Pondération** : Affectation des nouveaux poids normalisés et des nouvelles vraisemblances aux particules :

$$i = 1, \dots, N \left\{ \begin{array}{l} \rho_k^i = \frac{\rho_{k-1|k-1}^i p_i(y_k|Y_{k-1})}{\sum_i \rho_{k-1|k-1}^i p_i(y_k|Y_{k-1})} \\ V_k^i = V_{k-1}^i + \log(\hat{w}_k^i) + \log(p_i(y_k|Y_{k-1})) \end{array} \right.$$

4. **Estimation** : L'estimation à maximum de vraisemblance est approchée par la particule ayant accumulé la vraisemblance maximale, soit<sup>7</sup> :

$$\hat{X}_{k|k} \simeq \mathcal{LLE}(\hat{X}_{k|k}^{i_{max}}) \text{ où } i_{max} = \arg \max_i V_k^i$$

avec,  $\mathcal{LLE}$  Lissage locale "étendu" :

– Identité  $\mathcal{LLE}(\hat{X}_{k|k}^{i_{max}}) = \hat{X}_{k|k}^{i_{max}}$  pour les particules de Dirac.

– Lisseur de Kalman étendu pour les particules gaussiennes.

– Pour les particules de Dirac-Gauss le lissage local étendu est obtenu par un Lisseur de Kalman étendu, des composantes gaussiennes de la variable d'état, conditionnel aux composantes ponctuelles de Dirac.

5. **Redistribution** : Le maximum de vraisemblance trajectorielle est à mémoire croissante car il est nécessaire de mémoriser toutes les trajectoires afin de délivrer a posteriori la plus vraisemblable. Lors de la procédure de redistribution, les particules héritent de l'ensemble de la trajectoire  $(x_0^i, W_k^i)$  ainsi que de la vraisemblance associée.

On notera qu'au cours des redistributions successives, le passé trajectorielle lointain finit par devenir unique<sup>8</sup> et commun à l'ensemble des trajectoires. Ceci limite considérablement la mémoire totale utilisée par le filtre particulaire à maximum de vraisemblance trajectorielle pour une mise en œuvre avec allocation dynamique de mémoire (listes chaînées).

<sup>7</sup>Ce résultat est valable pour le cas de particules ponctuelles ou de particules diffuses à faible recouvrement. Pour ces dernières, leur "optimalité" asymptotique locale permet de l'étendre au cas général.

<sup>8</sup>Ceci se traduit par une pauvre diversité du passé trajectorielle lointain pouvant aboutir à un échec du lissage (cf [Briers 04] pour les détails et solutions proposées)

## 10 Conclusion

Les techniques particulières, tant aléatoires que déterministes, possèdent deux caractéristiques :

D’une part, les discrétisations qu’elles mettent en œuvre (sommes pondérées de particules diffuses/ponctuelles) permettent une reconstruction récursive fidèle de la densité de probabilité conditionnelle.

D’autre part, la discrimination en faveur des régions les plus pertinentes de l’espace d’état garantit une exploitation optimale des ressources disponibles pour la stratégie d’exploration adoptée (aléatoire/déterministe).

Cependant, malgré de nombreuses études académiques consacrées à son amélioration et son application dans divers domaines (Télécommunication, Télédétection, Robotique, Détection de pannes, etc.), très peu de réalisations non-académiques ont pu être développées à partir du filtre à particules aléatoires. En effet, le grand nombre de particules nécessaire pour obtenir de substantielles améliorations de performances limite considérablement son intérêt pratique.

Ce grand besoin de capacité de calcul est essentiellement dû à la stratégie d’exploration aléatoire pour obtenir la conformité en loi. Une telle exploration ne répond à aucun critère d’optimalité. Et c’est au prix d’un grand nombre de tirage et d’une redondance coûteuse (mais indispensable à sa mise en œuvre) que les flots dynamiques du système peuvent être simulés avec une précision suffisante. Le caractère sous-optimale de l’échantillonnage aléatoire se manifeste notamment dans le cas de faible bruit de dynamique, où en l’absence d’une optimisation locale par particules gaussiennes [Teulière 00, Bensalem 02], d’une régularisation par noyaux [Oudjane 00] ou d’une redistribution diffuse par tâche [Noyer 96], la précision du maillage particulière est entièrement définie par le tirage initial, et conduit pour un faible nombre de particule et une forte “observabilité” à de médiocres performances d’estimation.

Une amélioration importante des performances passe, donc, par l’optimisation de l’exploration a priori des évolutions du système d’état en évitant les redondances des trajectoires particulières. Ce fut le cas avec la technique particulière déterministe à mots discrets [Bensalem 02]. Elle est étendue au cas continu par les travaux présentés dans ce rapport.

## Chapitre 2

# Particules déterministes en filtrage non-linéaire à maximum de vraisemblance

### 1 Introduction

Le point clé de l’approche particulaire consiste dans la représentation de l’espace d’état par un maillage évolutif inter-dépendant de dimension constante conditionné par les observations. Un tel maillage vise à concentrer les ressources calculatoires sur les régions les plus pertinentes a posteriori de l’espace d’état, et permettre une représentation minimaliste de la densité de probabilité conditionnelle a posteriori. Le maillage particulaire peut se concevoir récursivement par morts des particules de faibles vraisemblances, et naissances de nouvelles branches, selon les flots de dynamique. A nombre de particules constant, les nombres de naissances et de morts doivent être égaux. C’est ce à quoi conduisent les techniques particulières aléatoires, à travers l’échange de particules entre les différentes positions particulières, dénommé redistribution.

L’interprétation particulaire des équations de filtrage non-linéaire comme un processus de branchement à naissances et morts peut être aussi mise en œuvre par un processus déterministe : exploration “exhaustive” (naissances) d’un grand nombre de nouvelles trajectoires d’état à partir de chaque point du maillage particulaire, et sélection déterministe (mort) garantissant la constance du nombre total de particules survivantes. Le choix aléatoire des branches explorées devient alors sans objet. Il peut être optimisé de façon déterministe. Ceci conduit naturellement à une procédure entièrement déterministe de Branchement/Selection du support particulaire, mieux adaptée au problème de filtrage notamment pour l’estimation à maximum de vraisemblance. Un tel algorithme a d’abord été développé, pour les systèmes d’état hybrides dans [Salut 01, Bensalem 02], avec bruit-sources à valeurs discrètes dans un alphabet fini. Pour de tels systèmes, l’exploration aléatoire de l’espace de séquence du bruit-source est évidemment sous-optimale par rapport à l’exploration discrète exhaustive. La procédure de Branchement/Selection entièrement déterministe n’a pas cet inconvénient et maximise la capacité d’exploration de l’espace des trajectoires d’état pour un nombre donné de particules.

L'algorithme particulière déterministe concerne tous les problèmes représentables par un système général de la forme (1.1), (1.2) :

Il est basé sur la discrétisation de l'espace des trajectoires d'état par un nombre fini de particules. Le maillage particulaire s'obtient, récursivement, par une procédure de Branchement/Selection déterministe. Le branchement consiste en l'exploration systématique, à partir de chaque particule, de l'arborescence engendrée par la dynamique du système pour une discrétisation déterministe "minimale" du bruit de dynamique. Les trajectoires particulières, ainsi explorées, cumulent des poids proportionnels à leurs pertinences pour la représentation de la densité de probabilité a posteriori. La cardinalité du maillage particulaire est maintenue constante par la sélection déterministe de  $N$  particules parmi les trajectoires candidates.



<sup>1</sup>Comme précisé plus loin, ce maillage peut être fait selon les axes d'état (maillage équidistant) ou l'axe de probabilité (maillage équiprobable). Dans le second cas, une nouvelle technique d'échantillonnage faisant l'objet d'une thèse en cours, permet de surmonter la contrainte d'indépendance.

Le flot du système augmente ainsi le maillage (arborescent) particulaire (mobile) :

$$E_k = (\otimes_{i=1}^n X_i^0) \otimes (\otimes_{j=1}^m W_j)^k \quad (2.1)$$

Les maillages  $(X_i^0)_{i=1}^n$  et  $(W_j)_{j=1}^m$  sont choisis de telle manière que les fonctions de répartition correspondantes  $F^{x_0}$  et  $F^w$ , soient représentées à la précision désirée par les sommes respectives des  $(\Pi_{i=1}^n n_i)$  et  $(\Pi_{j=1}^m m_j)$  mesures élémentaires : Dirac, Gauss ou Dirac-Gauss. On notera que cela est toujours possible, ces mesures étant une des bases possibles pour l'espace des mesures, lorsque leur nombre total tend vers l'infini. L'arborescence des séquences  $(\otimes_{j=1}^m W_j)^k$  étant exponentielle, l'algorithme consiste à mettre en œuvre une sélection des séquences correspondantes. On retient séquentiellement, à chaque nouvelle mesure, un nombre fixe  $N$  de particules en choisissant les plus pertinentes.

La procédure déterministe repose donc sur la représentation de la pertinence d'une région d'état par le poids de la particule élémentaire qui l'occupe. La redondance de particules est non seulement inutile, mais aussi néfaste pour les capacités exploratrices du filtre particulaire. L'absence de cette redondance dans les discrétisations a priori de l'état initial et du bruit de dynamique ne suffit pas pour l'économie au long terme des particules élémentaires, notamment lorsqu'elles sont gaussiennes. En effet, la mobilité des particules par l'exploration globale (branchement) et locale (filtre optimal local) peut amener différentes particules dans un même voisinage de l'espace d'état. Ce phénomène ne pouvant être évité a priori, il est nécessaire d'éliminer régulièrement cette interpénétration des particules, afin de conserver, tout au long du traitement, des capacités exploratrices "optimales".

### 3 Équations du Filtre Particulaire déterministe

Soient :

$$P_N(X_k|Y_k) = \sum_{n=1}^N \rho_n p_n(X_k|Y_k) \quad (2.2)$$

et

$$P_M(w_k) = \sum_{m=1}^M \alpha_m p_m(w_k) \quad (2.3)$$

les approximations respectives de  $p(X_k|Y_k)$ ,  $p(w_k)$  par sommes pondérées de mesures élémentaires. avec :

- $p_n$  densités élémentaires de moyenne  $\hat{X}_{k|k}^n$ , et  $\rho_n$  leurs poids respectifs<sup>2</sup>.
- $p_m$  densités élémentaires de moyenne  $\hat{w}_k^m$ , et  $\alpha_m$  leurs poids respectifs<sup>3</sup>.

Le maillage particulaire de l'espace d'état de  $X_k$  par les  $N$  densités élémentaires  $p_n(X_k|Y_k)$ , revient à écrire la v.a.  $X_k(\omega)$  sous la forme :

$$X_k(\omega) = \epsilon_k(\omega_\epsilon) X_k^n(\omega_X) \quad (2.4)$$

où,  $\epsilon_k(\omega_\epsilon)$  mesure aléatoire n-aire (de sélection du modèle local<sup>4</sup>) distribuée selon les  $\rho_n$  ( $p(\epsilon^n) = \rho_n$ ), et  $X_k^n(\omega_X)$  v.a. telle que  $p(X_k|Y_k, \epsilon^n) = p_n(X_k|Y_k)$ .

---

<sup>2</sup>calculés récursivement, selon les équations développées ci-dessous et détaillées plus loin selon les densités élémentaires utilisées (Dirac, Gauss, Dirac-Gauss) et la nature du bruit de mesure, à partir des poids initiaux dans le maillage particulaire déterministe de  $x_0$ .

<sup>3</sup>fixés lors du choix du maillage déterministe de  $w_k$ .

<sup>4</sup>Il s'agit de la sélection de la région d'appartenance de l'état  $X^n$  permettant l'approximation du modèle d'état par le modèle local  $n$ .

L'étape de prédiction s'écrit :

$$\begin{aligned}
 p_N(X_{k+1}|Y_k) &= \int p(\epsilon_k)p(X_{k+1}|Y_k, \epsilon_k)d\epsilon_k \\
 &= \int p(\epsilon_k)p(x_{k+1}|x_k, \epsilon_k)p(X_k|Y_k, \epsilon_k)d\epsilon_k \\
 &= \sum_{n=1}^N p(\epsilon^n)p(x_{k+1}|x_k, \epsilon^n)p(X_k|Y_k, \epsilon^n)
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Elle est simplifiée sous la notation :

$$p_N(X_{k+1}|Y_k) = \sum_{n=1}^N \rho_n p(x_{k+1}|x_k, n) p_n(X_k|Y_k) \tag{2.6}$$

De même, la discrétisation du bruit de dynamique se traduit par :

$$w_k(\omega) = \eta_k(\omega_\eta) w_k^m(\omega_w) \tag{2.7}$$

avec :

- $\eta_k(\omega_\eta)$  mesure aléatoire binaire (de sélection du niveau discrétisé du bruit) distribuée selon les  $\alpha_m$ .
- $w_k^m(\omega_w)$  v.a. telle que  $p(w_k|\eta^m) = p_m(w_k)$ .

La densité de transition  $p(x_{k+1}|x_k, n)$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 p(x_{k+1}|x_k, n) &= \int p(\eta_k)p(x_{k+1}|x_k, n, \eta_k)d\eta_k \\
 &= \sum_{m=1}^M \alpha_m p(x_{k+1}|x_k, n, m)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

En réutilisant les mêmes convention de notation simplifiée que plus haut.

La densité  $p(x_{k+1}|x_k, n, m)$  représente la probabilité de transition conditionnelle à la branche  $(n, m)$ .

La prédiction particulière devient alors :

$$\begin{aligned}
 p_{NM}(X_{k+1}|Y_k) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \rho_n \alpha_m p(x_{k+1}|x_k, n, m) p_n(X_k|Y_k) \\
 &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \rho_{n,m} p_{n,m}(X_{k+1}|Y_k)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

avec,  $p_{n,m}(X_{k+1}|Y_k)$  prédiction locale selon l'équation de dynamique approchée conditionnelle à la branche  $(n, m)$ .

Les extensions des densités élémentaires  $p_{n,m}$  pouvant être rendues arbitrairement faibles par le choix des densités  $p_n$  et  $p_m$ , les mêmes calculs peuvent être utilisés pour l'étape de correction.

En effet, une approximation de  $p(X_{k+1}|Y_{k+1})$  est donnée par (avec les mêmes notations) :

$$\begin{aligned}
p_{NM}(X_{k+1}|Y_{k+1}) &= \frac{p(y_{k+1}|x_{k+1})p_{NM}(X_{k+1}|Y_k)}{p_{NM}(y_{k+1}|Y_k)} \\
&= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \rho_{n,m} \frac{p(y_{k+1}|x_{k+1})p_{n,m}(X_{k+1}|Y_k)}{p_{NM}(y_{k+1}|Y_k)} \\
&= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{\rho_{n,m}p(y_{k+1}|Y_k, n, m)}{p_{NM}(y_{k+1}|Y_k)} \frac{p(y_{k+1}|x_{k+1})p_{n,m}(X_{k+1}|Y_k)}{p(y_{k+1}|Y_k, n, m)} \\
&= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \tilde{\rho}_{n,m} p_{n,m}(X_{k+1}|Y_{k+1}) \tag{2.10}
\end{aligned}$$

avec :

- $p(y_{k+1}|Y_k, n, m) = \int p(y_{k+1}|x_{k+1})p_{n,m}(X_{k+1}|Y_k)dX_{k+1}$  terme de normalisation de la correction locale conditionnelle à  $(n, m)$ ,
- $p_{NM}(y_{k+1}|Y_k) = \sum_n \sum_m p(y_{k+1}|Y_k, n, m)$  approximation par le maillage particulaire du terme de normalisation  $p(y_{k+1}|Y_k)$ ,
- $p_{n,m}(X_{k+1}|Y_{k+1})$  correction locale selon l'équation d'observation approchée conditionnelle à la branche  $(n, m)$ .

### Remarque 3.1

- La densité  $p_n(X_k|Y_k)$  est obtenue par lissage local conditionnel à la trajectoire  $n$  de la collection des densités marginales  $(p_n(x_\tau|Y_\tau))_{\tau=0}^k$ .
- Les vraisemblances particulières étant invariables par le lissage, cette étape peut être réalisée uniquement pour la particule à maximum de vraisemblance.
- Notons que ce lissage n'est pas réalisé lorsqu'on ne s'intéresse qu'au point terminal de la trajectoire à maximum de vraisemblance<sup>5</sup> :

$$\hat{X}_k(k) \text{ avec, } \hat{X}_k = \arg \max_{X_k} (V(X_k|Y_k))$$

invariable par le lissage, ce qui sera le cas dans les applications temps réel traitées ci-après.

## Algorithme du filtre à particules déterministes

Les équations du filtrage particulaire déterministe développées ci-dessus et la contrainte de constance du nombre total de particules aboutissent à un premier algorithme de filtre déterministe. Il sera détaillé, plus loin, selon les spécificités des différentes variantes (Gauss, Dirac-Gauss, Dirac, etc.) et complété par les procédures adéquates garantissant une exploitation optimale des ressources de calcul mises en œuvre.

---

<sup>5</sup>différent du maximum de vraisemblance marginale  $\hat{x}_k = \arg \max_{x_k} (V(x_k|Y_k))$ .



**1. Initialisation du support particulaire :**

Définition de

$$p_N(X_0|Y_0) = \sum_{n=1}^N \rho_n p_n(X_0|Y_0)$$

approximation de la probabilité conditionnelle a priori.

**2. Branchement déterministe :**

Enumération exhaustive des branches particulières engendrées par la discrétisation de l'espace du bruit de dynamique :

$$p_M(w_k) = \sum_{m=1}^M \alpha_m p_m(w_k)$$

et calcul de leurs poids a priori :

$$p_{NM}(X_{k+1}|Y_k) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \rho_{n,m} p_n(X_k|Y_k) p(x_{k+1}|x_k, n, m)$$

**3. Prédictions locales :**

Calcul des densités de probabilité élémentaires :

$$p_{n,m}(X_{k+1}|Y_k) = p_n(X_k|Y_k) p(x_{k+1}|x_k, n, m)$$

**4. Corrections Locales :**

Calcul des densités de probabilité élémentaires :

$$p_{n,m}(X_{k+1}|Y_{k+1}) = \frac{p(y_{k+1}|x_{k+1}) p_{n,m}(X_{k+1}|Y_k)}{p(y_{k+1}|Y_k, n, m)}$$

**5. Pondérations :**

Calcul des poids des branches particulières dans l'approximation :

$$p_{NM}(X_{k+1}|Y_{k+1}) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \tilde{\rho}_{n,m} p_{n,m}(X_{k+1}|Y_{k+1})$$

donnés par :

$$\tilde{\rho}_{n,m} = \frac{\rho_{n,m} p(y_{k+1}|Y_k, n, m)}{p_{NM}(y_{k+1}|Y_k)}$$

Équation générale détaillée dans le paragraphe suivant selon la nature des particules (Dirac, Dirac-Gauss, Gauss).

**6. Sélection déterministe :**

Sélection des  $N$  particules les plus pertinentes pour maintenir un nombre total constant.

**7. Estimation :**

Délivrance de la séquence particulaire à maximum de vraisemblance :

$$\arg \max_{n'} (\tilde{\rho}_{n'})$$

On constate ci-dessus que le filtre particulaire s'inspire du schéma markovien alors que le particulaire aléatoire s'inspire du schéma Monte Carlo.

## 4 Particules déterministes élémentaires

Les applications du filtre particulaire déterministe, réalisées jusqu'à présent ne concernent que deux types de particules élémentaires :

- Particules de Gauss utilisées dans le cas de variables d'état continues (application Radar [Partie II]).
- Particules de Dirac-Gauss utilisées dans le cas de variables d'état hybride : discret-continu (application GPS [Partie III], et communications radiomobiles [Bensalem 02] [Lehmann 04]).

### 4-1 Particules de Gauss

L'algorithme déterministe à particules de Gauss ainsi généralisées concerne tous les problèmes représentables par un système d'état de la forme :

$$\begin{cases} x_k = f(x_{k-1}, w_k) \\ y_k = h(x_k) + v_k \end{cases} \quad (2.11)$$

où l'état  $x \in \mathbf{R}^n$  est gouverné par la séquence d'un bruit de dynamique continu  $w \in \mathbf{R}^m$ , et  $f$  et  $h$  sont continuellement différentiables en leurs arguments  $x$  et  $w$ .

Comme dans le cas aléatoire, le filtre à particules déterministes de Gauss consiste à mettre en œuvre des filtres linéaires étendus locaux le long de trajectoires particulières nominales  $i$  définies par un état initial  $(\hat{x}_0^i, P_0^i)$  et une séquence de bruit de dynamique  $\{\hat{w}_\tau^i, q_\tau^i\}_{\tau=1}^k$ . La principale différence réside dans la définition des trajectoires particulières : les explorations a priori de l'état initial  $x_0$  et de l'espace des séquences de bruit de dynamique  $W_k^i$ , ne sont plus effectuées par tirages aléatoires sur les espaces images  $[0, 1]^n$  et  $\otimes_{\tau=1}^k [0, 1]^m$  mais par des discrétisations "fixes" de ces espaces.

Les maillages de l'espace d'état initial et de l'espace de bruit de dynamique sont choisis de telle manière que les densités de probabilité correspondantes soient représentées à la précision désirée par les sommes respectives de mesures gaussiennes élémentaires. De plus, les variances particulières  $P_0^i$  et  $q_\tau^i$  doivent être suffisamment faibles pour garantir la validité des approximations linéaires locales le long des trajectoires particulières.

1. **Initialisation du support particulaire.**

2. **Branchement déterministe.**

3. **Prédictions locales :**

Pour chaque couple  $(i, j) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\}$  la densité élémentaire  $p_{i,j}(x_k | Y_k)$  est une gaussienne définie par :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k|k-1}^{i,j} = f_k(\hat{x}_{k-1|k-1}^i, \hat{w}_j) \\ P_{k|k-1}^{i,j} = F_{x_k}^{i,j} P_{k-1|k-1}^i (F_{x_k}^{i,j})^T + F_{w_k}^{i,j} q_k^i (F_{w_k}^{i,j})^T \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} F_{x_k}^{i,j} &= \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_{k-1|k-1}^i, \hat{w}_j) \quad \text{jacobien de } f \text{ par rapport à } x \\ F_{w_k}^{i,j} &= \frac{\partial f}{\partial w}(\hat{x}_{k-1|k-1}^i, \hat{w}_j) \quad \text{jacobien de } f \text{ par rapport à } w \end{aligned}$$

#### 4. Corrections locales :

Correction locale de la branche  $(i, j)$  :

– *Terme de normalisation local*

$$p_{i,j}(y_k | Y_{k-1}) = \mathcal{N}_{H_{x_k}^{i,j} P_{k|k-1}^{i,j} (H_{x_k}^{i,j})^T + R_k} (y_k - h(\hat{x}_{k|k-1}^{i,j}))$$

avec :  $H_{x_k}^{i,j} = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_{k|k-1}^{i,j})$  jacobien de  $h$  par rapport à  $x$

– *Moments de la gaussienne*

$$\begin{cases} \hat{x}_{k|k}^{i,j} = \hat{x}_{k|k-1}^{i,j} + K_k^{i,j} (y_k - h(\hat{x}_{k|k-1}^{i,j})) \\ P_{k|k}^{i,j} = P_{k|k-1}^{i,j} - K_k^{i,j} H_{x_k}^{i,j} P_{k|k-1}^{i,j} \end{cases}$$

avec :  $K_k^{i,j} = P_{k|k-1}^{i,j} H_{x_k}^{i,j} (H_{x_k}^{i,j} P_{k|k-1}^{i,j} (H_{x_k}^{i,j})^T + R_k)^{-1}$  gain de Kalman.

#### 5. Pondérations :

Le poids de la branche  $(i, j)$  est donné par :

$$\rho_{k|k}^{i,j} = \frac{\rho_{k-1|k-1}^i \alpha^j \mathcal{N}_{H_{x_k}^{i,j} P_{k|k-1}^{i,j} (H_{x_k}^{i,j})^T + R_k} (y_k - h(\hat{x}_{k|k-1}^{i,j}))}{\sum_{l,m} \rho_{k-1|k-1}^l \alpha^m \mathcal{N}_{H_{x_k}^{l,m} P_{k|k-1}^{l,m} (H_{x_k}^{l,m})^T + R_k} (y_k - h(\hat{x}_{k|k-1}^{l,m}))}$$

#### 6. Sélection déterministe.

#### 7. Estimation.

## 4-2 Particule de Dirac-Gauss

L'algorithme à particules déterministes de Dirac-Gauss est particulièrement utile dans le cas de variables d'état hybrides. Il a trouvé ses premières applications en télécommunication [Bensalem 02], où les variables continues sont linéaires conditionnellement aux variables discrètes.

Il est ici étendu au cas, plus général, où une approximation par linéarisations locales conditionnelles aux positions des composantes continues et discrètes de la variable d'état est possible (cf partie III), c'est à dire les systèmes décrits par :

$$\begin{cases} \xi_k = g(\xi_{k-1}, u_k) \\ \sigma_k = f(\sigma_{k-1}, \xi_k, \omega_k) \\ y_k = h(\sigma_k, \xi_k) + v_k \end{cases}$$

où l'état  $\sigma \in \mathbf{R}^n$  est un état continu gouverné par la séquence d'un bruit de dynamique continue  $\omega \in \mathbf{R}^m$  et par la variable discrète  $\xi$ , la variable discrète  $\xi$  est gouvernée par un bruit-source  $u$  discret à valeur dans un alphabet fini, et  $f$  et  $h$  sont continûment différentiables conditionnellement à  $\xi$  en leurs arguments  $\sigma$  et  $\omega$ .

Conditionnellement aux trajectoires particulières  $(\xi_0^i, U_k^i)$ , les densités de probabilité conditionnelles  $p(\sigma_k | Y_k, (\xi_0^i, U_k^i))$  peuvent être approchées par des sommes pondérées de gaussiennes :  $\sum \rho^j \mathcal{N}_P(\sigma_k - \hat{\sigma}_{k|k}^j)$ .

L'algorithme particulière consiste à mettre en œuvre des filtres linéaires étendus conditionnels le long des trajectoires particulières nominales obtenues par l'exploration de séquences arborescentes données par les discrétisations conjointes de l'espace du bruit-source discret  $u_k$  selon des mesures de Dirac et de celui du bruit continu  $\omega_k$  selon des mesures gaussiennes.

A chaque instant, l'arborescence particulière exhaustive est donnée par :

$$E_k = \Xi_0 \otimes \Sigma_0 \otimes B^k \otimes (\Omega)^k$$

où  $\Xi_0$  est le maillage ponctuel initial de l'état  $\xi_0$ ,  $\Sigma_0$  le maillage gaussien initial de l'état  $\sigma_0$ ,  $B$  l'alphabet fini du bruit-source discret  $u$ , et  $\Omega$  le maillage gaussien du bruit de dynamique continu  $\omega$ .

La mise en œuvre à nombre de particules constant est obtenue par sélection déterministe à maximum de vraisemblance de  $N$  particules.

#### 1. Initialisation du support particulière.

#### 2. Branchement déterministe.

#### 3. Prédiction locales :

Pour chaque triplet  $(i, j, l) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, \text{Card}(\Omega)\} \times \{1, \dots, \text{Card}(B)\}$ , où  $i$  densité gaussienne du maillage particulière courant,  $j$  point de discrétisation du bruit continu et  $l$  valeur dans l'alphabet finie du bruit-source discret, la densité élémentaire  $p_{i,j,l}(x_k | Y_k)$  est une densité de Dirac-Gauss définie par :

– *Partie ponctuelle*

$$\hat{\xi}_{k|k-1}^{i,j,l} = f_k(\hat{\xi}_{k-1|k-1}^i, \hat{u}_k^l)$$

avec :

$$\hat{u}_k^l \in B$$

– *Partie diffuse*

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{k|k-1}^{i,j,l} = f_k(\hat{\sigma}_{k-1|k-1}^i, \hat{\xi}_{k|k-1}^{i,j,l}, \hat{\omega}_k^l) \\ P_{k|k-1}^{i,j,l} = F_k^{i,j,l} P_{k-1|k-1}^i \left( F_k^{i,j,l} \right)^T + F_{w_k}^{i,j,l} q_k^l \left( F_{w_k}^{i,j,l} \right)^T \end{cases}$$

avec :

$$F_k^{i,j,l} = \frac{\partial f}{\partial \sigma}(\hat{\sigma}_{k-1|k-1}^i, \hat{\xi}_{k|k-1}^{i,j,l}, \hat{\omega}_k^l) \quad \text{jacobien de } f \text{ par rapport à } \sigma$$

$$F_{w_k}^{i,j,l} = \frac{\partial f}{\partial w}(\hat{\sigma}_{k-1|k-1}^i, \hat{\xi}_{k|k-1}^{i,j,l}, \hat{\omega}_k^l) \quad \text{jacobien de } f \text{ par rapport à } w$$

#### 4. Corrections locales :

Correction locale de la branche  $(i, j, l)$  :

– *Terme de normalisation local*

$$p_{i,j,l}(y_k | Y_{k-1}) = \mathcal{N}_{H_k^{i,j,l} P_{k|k-1}^{i,j,l} (H_k^{i,j,l})^T + R_k} (y_k - h(\hat{\sigma}_{k|k-1}^{i,j,l}, \hat{\xi}_{k|k-1}^{i,j,l}))$$

avec :

$$H_k^{i,j,l} = \frac{\partial h}{\partial \sigma}(\hat{\sigma}_{k|k-1}^{i,j,l}, \hat{\xi}_{k|k-1}^{i,j,l}) \quad \text{jacobien de } h \text{ par rapport à } \sigma$$

– *Partie ponctuelle*

$$\hat{\xi}_{k|k}^{i,j,l} = \hat{\xi}_{k|k-1}^{i,j,l}$$

– *Partie diffuse*

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{k|k}^{i,j,l} = \hat{\sigma}_{k|k-1}^{i,j,l} + K_k^{i,j,l}(y_k - h(\hat{\sigma}_{k|k-1}^{i,j,l}, \hat{\xi}_{k|k-1}^{i,j,l})) \\ P_{k|k}^{i,j,l} = P_{k|k-1}^{i,j,l} - K_k^{i,j,l} H_k^{i,j,l} P_{k|k-1}^{i,j,l} \end{cases}$$

où le gain de Kalman  $K_k^{i,j,l}$  est donné par :

$$K_k^{i,j,l} = P_{k|k-1}^{i,j,l} H_k^{i,j,l} (H_k^{i,j,l} P_{k|k-1}^{i,j,l} (H_k^{i,j,l})^T + R_k)^{-1}$$

### 5. Pondérations :

Le poids de la branche  $(i, j, l)$  est donné par :

$$\rho_{k|k}^{i,j,l} = \frac{\rho_{k-1|k-1}^i \alpha^j \beta^l \mathcal{N}_{H_k^{i,j,l} P_{k|k-1}^{i,j,l} (H_k^{i,j,l})^T + R_k}(y_k - h(\hat{\sigma}_{k|k-1}^{i,j,l}, \hat{\xi}_{k|k-1}^{i,j,l}))}{\sum \rho_{k-1|k-1}^{i'} \alpha^{j'} \beta^{l'} \mathcal{N}_{H_k^{i',j',l'} P_{k|k-1}^{i',j',l'} (H_k^{i',j',l'})^T + R_k}(y_k - h(\hat{\sigma}_{k|k-1}^{i',j',l'}, \hat{\xi}_{k|k-1}^{i',j',l'}))}$$

### 6. Sélection déterministe.

### 7. Estimation.

## 4-3 Particule de Dirac

Les particules de Dirac sont peu utilisées en filtrage particulaire déterministe. En effet, l'approximation par des mesures ponctuelles de la densité de probabilité conditionnelle dans le cas de variables d'état continues, pour une précision donnée, nécessite souvent un nombre très important de particules. Le "pavage" par particules gaussiennes localement "optimales" lui a été souvent préféré.

Cependant, pour le cas de variables d'état à valeurs discrètes gouvernées par le système :

$$\begin{cases} x_k = f(x_{k-1}, u_k) \\ y_k = h(x_k) + v_k \end{cases}$$

où  $u$  est un bruit-source à valeurs discrètes dans un alphabet fini  $B$ , l'utilisation de particules ponctuelles de Dirac prend tout son sens.

Le schéma de l'algorithme à particules déterministes de Dirac est similaire à celui à particules gaussiennes. La principale différence réside dans les équations locales de prédiction/correction et dans la mise à jour des vraisemblances.

1. **Initialisation du support particulaire.**

2. **Branchement déterministe.**

3. **Prédictions locales :**

Pour chaque couple  $(i, j) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, \text{Card}(B)\}$ , représentant une branche particulaire, la densité élémentaire  $p_{i,j}(x_k|Y_k)$  est une densité de Dirac définie par :

$$\hat{x}_{k|k-1}^{i,j,l} = f_k(\hat{x}_{k-1|k-1}^i, \hat{u}_k^l)$$

avec :

$$\hat{u}_k^l \in B$$

4. **Corrections locales :**

Les supports ponctuels de Dirac sont invariants par correction locale. Seuls les poids sont corrigés par la nouvelle observation  $y_k$ .

Ainsi, pour la branche  $(i, j)$  :

$$\hat{x}_{k|k}^{i,j} = \hat{x}_{k|k-1}^{i,j}$$

5. **Pondérations :**

Le poids de la branche  $(i, j)$  est donné par :

$$\rho_{k|k}^{i,j} = \frac{\rho_{k-1|k-1}^i \alpha^j \mathcal{N}_{R_k}(y_k - h(\hat{x}_{k|k-1}^{i,j}))}{\sum \rho_{k-1|k-1}^{i'} \alpha^{j'} \mathcal{N}_{R_k}(y_k - h(\hat{x}_{k|k-1}^{i',j'}))}$$

6. **Sélection déterministe.**

7. **Estimation.**

Notons que, l'algorithme à particules déterministes de Dirac peut être aisément étendu au cas de variable d'état continue avec bruit de dynamique continu ou discret.

#### Remarque 4.1

L'algorithme à particules déterministes de Dirac, dans le cas de variables d'état à valeurs discrètes dans un alphabet fini correspond au "M algorithm" [Anderson 84] utilisé en télécommunication.

## 5 Branchement/Sélection déterministe

### 5-1 Branchement déterministe

Le branchement déterministe, ou exploration déterministe, a été introduit, par *Ben Salem* et *Salut* [Bensalem 01], en filtrage particulaire à maximum de vraisemblance pour le cas d'un bruit source à valeurs discrètes dans un alphabet fini.

En effet, dans ce cas de figure, la redondance du tirage aléatoire à la "*Monte Carlo*" est, non seulement inutile, mais représente aussi un gaspillage de la capacité calculatoire. Une exploration "exhaustive" est donc plus appropriée. L'extension au cas continu est immédiate.

Le branchement déterministe repose sur l'utilisation de maillages déterministes des espaces des bruits  $\otimes_{j=1}^m W_j$  et  $\otimes_{l=1}^p V_l$ .

Les maillages  $W_j, V_l$  peuvent être obtenus par répartition uniforme des densités élémentaires sur

un borné de l'espace d'incertitude,

$$\begin{aligned} W_j &= \{w_j^1, w_j^2, \dots, w_j^{M_j}\} \\ V_l &= \{v_l^1, v_l^2, \dots, v_l^{P_l}\} \end{aligned}$$

avec  $(w_j^s)$  (respct.  $(v_l^s)$ ) une suite de points uniformément répartis sur un sous-ensemble du domaine d'incertitude du bruit  $U_{w_j} = \bigcup_{\alpha} I_{w_j}^{\alpha} \subset \mathbb{R}$  (respect.  $U_{v_l} = \bigcup_{\alpha} I_{v_l}^{\alpha} \subset \mathbb{R}$ ) tel que  $I_{w_j}^{\alpha}$  (respect.  $I_{v_l}^{\alpha}$ ) sont des intervalles bornés de  $\mathbb{R}$  et les queues de distribution de  $w_j$  (respect.  $v_l$ ) en dehors de  $U_{w_j}$  (respect.  $U_{v_l}$ ) sont négligeables.

Ils peuvent, aussi, tel que proposé par *Ben Salem* [Bensalem 02], être réalisés par répartition équiprobable<sup>6</sup> des densités élémentaires sur les espaces images  $[0, 1]^m$ ,  $[0, 1]^p$  des fonctions de répartition des bruits. Dans ce cas, les positions des densités élémentaires sur l'espace du bruit sont obtenues par inversion de la fonction de répartition<sup>7</sup>.

$$\begin{aligned} W_j &= F^{w_k-1} \left( \left\{ \frac{1}{M_j}, \frac{2}{M_j}, \dots, 1 - \frac{1}{M_j} \right\} \right) \\ V_l &= F^{v_k-1} \left( \left\{ \frac{1}{P_l}, \frac{2}{P_l}, \dots, 1 - \frac{1}{P_l} \right\} \right) \end{aligned}$$

Le maillage particulaire est, alors, donné récursivement par

$$E_k = E_{k-1} \otimes (\otimes_{j=1}^m W_j) \otimes (\otimes_{l=1}^p V_l)$$

Soit,

$$E_0 = \otimes_{i=1}^n X_i^0$$

maillage du domaine d'incertitude de l'état initial  $x_0$ . À l'instant  $k$  le maillage particulaire évolutif s'écrit,

$$E_k = (\otimes_{i=1}^n X_i^0) \otimes (\otimes_{j=1}^m W_j)^k \otimes (\otimes_{l=1}^p V_l)^k$$

Cette arborescence particulaire étant exponentielle, à chaque nouvelle observation, seules  $N$  particules, parmi les  $NMP$  ( $M = \prod_{j=1}^m M_j$ ,  $P = \prod_{l=1}^p P_l$ ) créées par le branchement, doivent être retenues pour une mise en œuvre à nombre de constant de particules de l'algorithme.

## 5-2 Sélection déterministe à maximum de vraisemblance

L'étape de sélection consiste à choisir la plus pertinente parmi les  $\mathcal{C}_{NMP}^N$  approximations à  $N$  particules possibles. Elle peut être optimisée au sens du maximum de vraisemblance,

$$\max_{\{n_i\}} [p(\{n_i\})] = \max_{\{n_i\}} \left[ N! \prod_{i=0}^{NMP-1} \frac{(\rho_i)^{n_i}}{n_i!} \right]$$

avec :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{NMP-1} n_i = N \\ \forall i, \quad 0 \leq n_i \leq 1 \end{cases}$$

<sup>6</sup>La discrétisation uniforme de l'espace de probabilité, optimale pour l'estimation à minimum de variance, ne conserve pas sa suprématie en maximum de vraisemblance. En effet, à défaut d'exhaustivité, la recherche du maximum exige une discrétisation minimaliste avec une forte couverture de l'espace d'incertitude. Dans le cas de bruit source borné, un tel compromis conduit à un schéma de discrétisation a priori par répartition équidistante des densités élémentaires de propabilité.

<sup>7</sup>Dans le cas de composantes de bruit non-indépendantes, une technique de discrétisation de l'espace de probabilité est proposée dans [Kazem re]

Ceci se réécrit, sous la seconde contrainte :

$$p(\{n_i\}) \propto \prod_{\substack{i=0 \\ n_i \neq 0}}^{NMP-1} (\rho_i)$$

avec les mêmes contraintes additives que ci-dessus. Ce critère conduit à une règle simple de sélection de  $N$  particules par ordre décroissant des vraisemblances.

Cet algorithme de sélection est parfaitement adapté au critère d'estimation à maximum de vraisemblance. En effet, il permet de conserver l'ordre de vraisemblance des particules, après sélection (conservation du maximum de vraisemblance).

Notons, par ailleurs, que le critère de sélection à minimum de variance :

$$\min_{\substack{(\bar{n}_i) \in \{0,1\}^{NMP} \\ \sum \bar{n}_i = N}} E[(n_i - (\bar{n}_i))^T ((n_i) - (\bar{n}_i))]$$

coïncide dans ce cas avec celui à maximum de vraisemblance. Il aboutit à la même règle de sélection.

L'élimination de particules dans l'approximation des densités de probabilité conditionnelles introduit une erreur d'approximation proportionnelle à la somme des poids des particules éliminées. Pour un nombre de particules  $N$  suffisant, la sélection revient à n'éliminer que des particules de faibles pertinence, dont la contribution à la reconstruction de la densité de probabilité globale est négligeable.

### 5-3 Intermittence des Branchement/Sélection déterministes

Sous faible "observabilité", la discrimination<sup>8</sup> des hypothèses particulières nécessite une intégration cohérente sur une longue période. Le cardinal important de l'arborescence particulière engendrée par branchement systématique, ainsi que la forte redondance<sup>9</sup> des hypothèses particulières en son sein, nécessitent l'adaptation de la technique particulière pour assurer l'exploitation optimale des capacités de calcul.

Notons, comme pour la redistribution des particules aléatoires, que la mise en œuvre intermittente de l'étape de Branchement/Sélection permet de "pallier" les faibles observabilités. Ceci revient à maintenir stationnaire<sup>10</sup> le maillage particulière pendant une durée donnée pour une meilleur discrimination des hypothèses particulières.

Cette durée s'obtient par une étude<sup>11</sup> a priori du système dynamique afin de définir la durée maximale de stationnarité compatible avec la précision d'estimation désirée.

L'exclusion mutuelle des particules déterministes (cf section suivante) permet une réduction significative du nombre de trajectoires particulières indiscernables. Elle permet, donc, de ne garder parmi les branches de l'arborescence particulière que celles dont les états courants sont suffisamment différents pour une discrimination efficace. Ceci donne naturellement lieu à une intermittence adaptée à la dynamique et à l'observabilité du système d'état.

---

<sup>8</sup>Sélection par les poids.

<sup>9</sup>redondance due au croisement de trajectoires particulières dont la discrimination, basée sur un nombre limité d'observation, est peu efficace.

<sup>10</sup>une unique branche par hypothèse particulière minimisant l'erreur quadratique moyenne de prédiction : hypothèse de bruits de moyennes nulles

<sup>11</sup>simulation hors-ligne le long de trajectoires de référence.



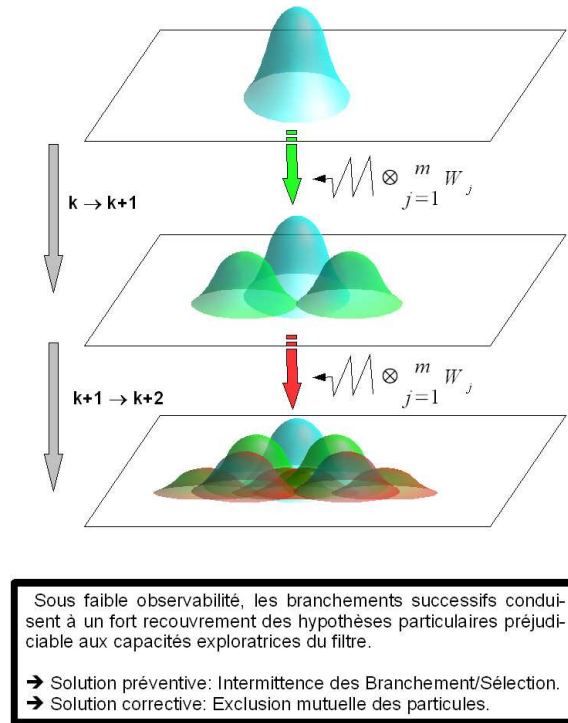


FIG. I.2.2 – Redondance des branchements successifs sous faible observabilité

**Remarque 5.1**

*Les considérations ci-dessus sont sans objets, dans le cas de bruit-sources à valeurs discrètes.*

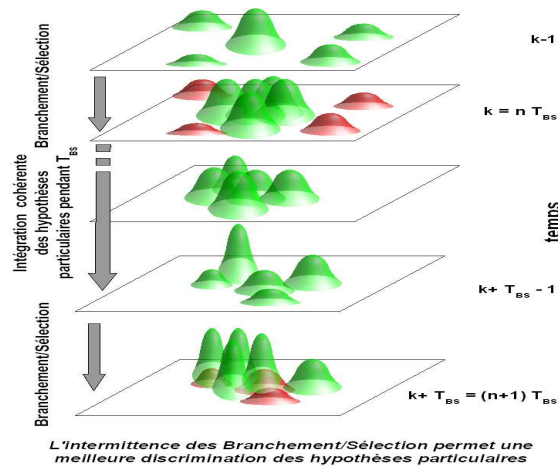


FIG. I.2.3 – Intermittence des Branchement/Sélection.

## 5-4 Algorithme de Branchement/Sélection déterministe

1. **Initialisation du support particulaire.**
2. **Branchement déterministe :**
  - **Si**  $k = nT_{BS}$ 
    - **Pour** chaque particule  $i \in \{1, \dots, N\}$ 
      - Création de  $M$  branches  $(i, j)$  telles que
      - **Pour**  $j \in \{1, \dots, M\}$ 
        - $(i, j)$  = la branche particulaire issue de  $X_i$  est perturbée par  $\omega_j$
    - **Sinon**
      - Création d'une unique branche  $i$  donnée par  $(X_i, \omega_i = 0)$
  - avec  $T_{BS}$  périodicité des Branchement/Sélection.
3. **Prédictions locale.**
4. **Corrections locales.**
5. **Pondérations**
6. **Sélection déterministe :**
  - **Si**  $k = nT_{BS}$ 
    - Sélection des  $N$  particules les plus massives parmi les  $MN$  possibles.
  - **Sinon**
    - Conservation de la totalité ( $N$  particules) du support particulaire.
7. **Estimation.**

## 6 Interpénétration des particules et exclusions mutuelles

La saturation du support particulaire est le dual de la dégénérescence dans le cas d'une évolution aléatoire. Elle se manifeste par la concentration de plusieurs particules dans des régions d'état de faibles étendues.

La saturation du support concerne autant les algorithmes déterministes à particules de Dirac que ceux à particules de Gauss. Elle est due à la rencontre de plusieurs trajectoires autour du même point terminal  $\hat{x}_k$ . Ce phénomène est accentué dans le cas des particules gaussiennes par la convergence asymptotique des particules voisines vers un même optimum local.

Soumises approximativement au même modèle local et corrigées par les mêmes observations, de telles trajectoires évolueraient de concert tant en mobilité locale qu'en exploration globale des bruits (naissance des branches particulières). Elles occupent donc inutilement une partie du support particulaire, et limitent ainsi les capacités exploratoires.

Les vraisemblances des trajectoires se recoupant autour d'un même point terminal  $\hat{x}_k$  ne diffèrent que par leurs passés respectifs, leur futur étant nécessairement commun. Afin d'optimiser l'utilisation des ressources calculatoires mises en œuvre, il est donc utile de ne garder que celle de poids maximum. Notons, contrairement au cas marginal, que les vraisemblances trajectoires ne sauraient s'additionner.

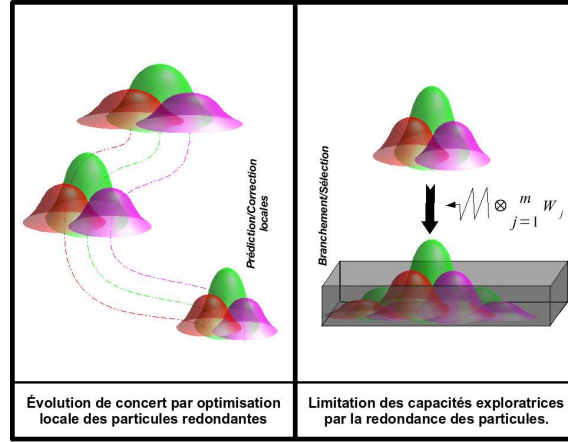
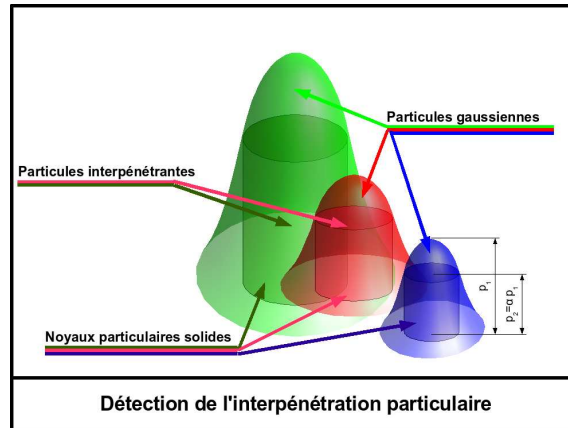


FIG. I.2.4 – Évolution de particules interpénétrantes

### 6-1 Cas de particules diffuses

Pour des particules diffuses de Gauss, l'exclusion mutuelle est obtenue en considérant un noyau solide de chaque particule gaussienne interdisant toute inter-pénétration. Un tel noyau est donné par la surface ellipsoïdale équiprobable de probabilité seuil donnée  $\alpha$ . Un test d'intersection des surfaces des noyaux particuliers solides permet de détecter les particules redondantes, afin de n'en garder que la plus massive.

FIG. I.2.5 – Détection des particules interpénétrantes  
dans le cas de particules gaussiennes

Cette procédure permet de réduire la “redondance” des particules au minimum naturel inhérent à l’instant courant.

La détection de l’intersection des surfaces ellipsoïdales n’a pas de mise en œuvre algorithmique de coût raisonnable, dans le cas général. Une technique, apparentée à la méthode de “lancer de

rayons” utilisée en synthèse d’image, permet une détection approchée de la collision des surfaces ellipsoïdales. Cette technique consiste en un test de visibilité de l’ellipsoïde cible pour des rayons lumineux issus du centre de l’ellipsoïde source. La collision est détectée dès qu’un test de visibilité est réussi. L’orientation quasi-identique des gaussiennes appartenant à une même région de l’espace d’état, permet une implémentation moins coûteuse de cet algorithme. En effet, il suffit, dans ce cas, de réaliser le test de visibilité le long du rayon joignant les centres des ellipsoïdes.

## 6-2 Cas de particules ponctuelles

Les particules de Dirac étant de support ponctuel, la redondance stricte se traduit par l’égalité de leurs moyennes respectives. Une région d’état de très faible étendue, peut donc, théoriquement, être représentée par une infinité de particules. Il s’agit d’un grand nombre, en pratique qui varie selon le rapport entre cette étendue et la précision numérique de la représentation des nombres réels. Or, cette précision numérique est largement supérieure aux précisions théoriques atteignables pour un problème de filtrage. Pour des raisons d’économie de particules et pour une précision désirée donnée, une étendue minimale autour de chaque particule peut être définie comme son domaine de non-interpénétration.

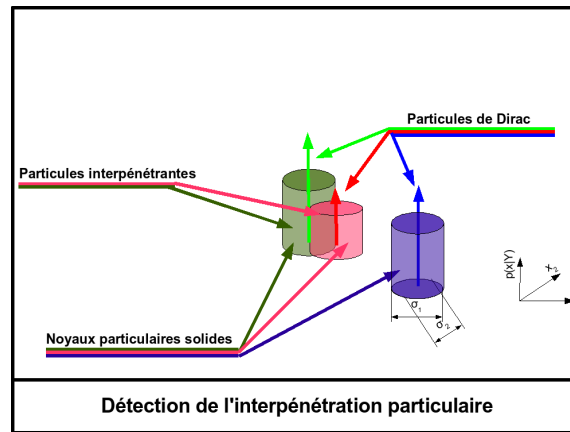


FIG. I.2.6 – Détection des particules interpénétrantes dans le cas de particules de Dirac

## 6-3 Reconstruction de la densité de probabilité trajectorielle

La contribution des trajectoires particulières éliminées par l’exclusion mutuelle à la reconstruction de la densité de probabilité trajectorielle conditionnelle n’est pas négligeable. Le maillage particulaire à l’issue de cette étape ne correspond donc pas à une approximation de cette densité de probabilité conditionnelle, mais à celle de son maximum.

L’exclusion mutuelle peut de ce fait être considérée comme une partie de l’étape d’estimation où des décisions ”fermes” peuvent d’ores et déjà être prises concernant l’ordre des vraisemblances (définitif) de certaines trajectoires (trajectoires interpénétrantes).

Notons que l’algorithme avec exclusion mutuelle correspond à la mise en œuvre particulaire du principe d’optimalité de Bellman dans le sens direct.

## 6-4 Algorithme d'élimination de l'interpénétration

1. Initialisation du support particulaire.
2. Branchement déterministe
3. Prédiction locales.
4. Corrections locales.
5. Pondérations.
6. Sélections :
  - 6.a- Sélection locale (Exclusions mutuelles) :
    - Tri des particules par ordre décroissant des vraisemblances,
    - **Pour** chaque particule  $i \in \{1, \dots, NM - 1\}$ 
      - **Pour** chaque particule  $j \in \{i + 1, \dots, NM\}$ 
        - **Si**  $\varepsilon_i \cap \varepsilon_j \neq \emptyset$  (intersection des domaines de non-interpénétration des particules  $i$  et  $j$ .)
          - élimination de la particule  $j$  (la moins massive).
    - Renormalisation des poids.
  - 6.b- Sélection déterministe.
7. Estimation.

### Remarque 6.1

- La conservation de la particule la plus vraisemblable parmi les particules inter-pénétrantes garantit la non extinction du support. Le cas limite étant la survie d'une unique particule, il exprime la suffisance d'un unique Filtre de Kalman Étendu pour l'approximation du filtre optimal.
- Le seuil de détection d'interpénétration joue un rôle important dans l'optimisation des précisions et des capacités de tenue en accrochage. Ainsi, un seuil très élevé se traduit par une pauvre approximation autour des maxima locaux. Par contre un seuil très faible conduit à un fort recouvrement autour des maxima les plus élevés au détriment des plus faibles.
- L'élimination de l'interpénétration dans le support particulaire repose sur le principe d'optimalité de Bellman. Elle permet d'interpréter le filtre particulaire comme adaptation au cas continu "non-stationnaire" de l'algorithme de Viterbi [Fourney 73], au même titre que [Larson 66, Morell 91]. Notons cependant que, contrairement à ces derniers, l'algorithme particulaire utilise une grille évolutive associée à une approximation par Kalman étendu locaux des calculs de vraisemblances trajectorielles.

## 7 Mise en œuvre du filtre déterministe à particules gaussiennes

Contrairement au filtre particulaire aléatoire, où seuls le nombre total de particules et la redistribution conditionnent le bon fonctionnement du filtre, le filtre déterministe requiert un paramétrage plus important, essentiel pour atteindre le coût algorithmique restreint que permet le nombre réduit de particules.

## 7-1 Cas des particules de Gauss

Nous présentons, ici, le paramétrage du filtre à particules déterministes de Gauss basée essentiellement sur la garantie de la validité des approximations locales conditionnelles du système d'état par plages de fonctionnement données (dynamique et rapport Signal/Bruit), point clé pour une mise en œuvre efficace et une meilleure approximation de l'estimée.

Le filtre à particules déterministes de Gauss est basé sur une approximation "segmentaire" par linéarisation locale des équations de dynamique et d'observation :

$$f(x, w) \simeq \begin{cases} a_0x + b_0w + c_0 & \text{si } (x, w) \in I_0 \times J_0 \\ a_1x + b_1w + c_1 & \text{si } (x, w) \in I_1 \times J_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_sx + b_sx + c_s & \text{si } (x, w) \in I_s \times J_s \end{cases}$$

avec :

- $a_i, b_i$  et  $c_i$  matrices de dimensions respectifs  $n \times n$ ,  $n \times m$  et  $n \times 1$  ( $n$  dimension du vecteur d'état et  $m$  celle du vecteur de bruit de dynamique),
- $I_i$  compacts de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $\bigcup_{i=0}^s I_i$  couvre l'essentiel du domaine d'incertitude de  $x$ ,
- $J_i$  compacts de  $\mathbb{R}^m$  tels que  $\bigcup_{i=0}^s J_i$  couvre l'essentiel du domaine de définition de  $w$ .

$$h(x) \simeq \begin{cases} \alpha_0x + \beta_0 & \text{si } x \in K_0 \\ \alpha_1x + \beta_1 & \text{si } x \in K_1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_sx + \beta_s & \text{si } x \in K_s \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_qx + \beta_q & \text{si } x \in K_q \end{cases}$$

avec :

- $\alpha_i, \beta_i$  matrices de dimensions respectifs  $p \times n$  et  $p \times 1$  ( $n$  dimension du vecteur d'état et  $p$  celle du vecteur de mesure),
- $K_i$  compacts de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $\bigcup_{i=0}^q K_i$  couvre l'essentiel du domaine d'incertitude de  $x$ .

Une telle approximation "segmentaire" impose des contraintes sur les domaines d'incertitude, et donc sur les variances<sup>12</sup>, de certaines composantes de la variable d'état.

Ceci revient à garantir que les variances des composantes d'état critiques pour la linéarisation locale restent inférieures aux seuils définis par l'approximation "segmentaire" tout au long du traitement :

$$\forall k, P_{\alpha\alpha}^i \leq S_\alpha$$

où  $\alpha$  désigne une composante scalaire du vecteur d'état  $x$  sujette à une contrainte de linéarisation, et  $S_\alpha$  le seuil correspondant.

Or, l'évolution de ces variances est donnée par l'équation de Riccati des linéarisations correspondantes. La simulation hors-ligne de l'équation locale de Riccati permet donc de fixer les variances

<sup>12</sup>le domaine de confiance d'une gaussienne étant empiriquement fixé à deux fois son écart-type

élémentaires de l'état initial et des différentes composantes du bruit de dynamique, pour une variance d'état imposée par la linéarisation segmentaire. En pratique cette simulation hors-ligne est réalisée le long de trajectoires de référence sélectionnées en fonction des objectifs pratiques.

Les variances élémentaires ainsi définies permettent, pour un domaine d'incertitude donné de déterminer les discrétisations  $N_0$  et  $M$  nécessaires aux linéarisations segmentaire de  $x_0$  et  $w$ .

Par ailleurs, la simulation de l'équation de Riccati permet de préciser les variances élémentaires des particules gaussiennes en régime permanent. La périodicité "maximale"  $T_{B/S}$  des Branchement/Sélection permettant d'éviter la divergence du filtre s'obtient, donc, à partir du temps minimal pour atteindre une erreur égale à l'écart-type<sup>13</sup> du régime permanent selon l'une au moins des composantes d'état.

La taille de l'arborescence particulaire exhaustive est alors donnée par :

$$N_k = N_0(M)^{\lfloor \frac{k}{T_{B/S}} \rfloor}$$

où  $\lfloor \frac{k}{T_{B/S}} \rfloor$  désigne la partie entière de  $\frac{k}{T_{B/S}}$  : nombre de Branchement/Sélection réalisé à l'instant  $k$ .

Pour un nombre de particule  $N$ , la durée moyenne d'intégration cohérente permise est donc donnée par la formule :

$$N \simeq N_0(M)^{\lfloor \frac{\tau}{T_{B/S}} \rfloor}$$

Enfin, le seuil  $\alpha$  du domaine de non-interpénétration des gaussiennes élémentaires peut être empiriquement fixé au tiers de son écart-type.

## 7-2 Cas des particules de Dirac

Bien qu'il ne concerne pas les applications abordées dans ce mémoire, pour le cas de particules de Dirac (ou celui des composantes ponctuelles des particules de Dirac-Gauss) pour des variables d'état continues s'inspire de la procédure exposée ci-dessus pour sa paramétrisation. Il suffit d'appliquer l'approximation "minimale" d'une mesure gaussienne par  $2^n + 1$  mesures de Dirac telle que celle adoptée par la "unscented Transformation" (cf section 8-1-3 du chapitre 1).

De même que dans le cas de particules gaussiennes, le nombre total de particules est fixé par le temps d'intégration cohérente suffisant à la sélection déterministe. Par ailleurs, l'étendue du domaine de non-interpénétration des particules ponctuelles, ainsi que l'intermittence des Branchement/Sélection, peuvent être obtenues de manière similaire en remplaçant les variances des particules gaussiennes par leurs équivalent "unscented".

Sachant que le paramétrage gaussien est toujours inférieur ou égal au paramétrage "unscented", cela souligne qu'aucun surcroît de performance ne saurait être espéré par des particules de Dirac et qu'elles doivent satisfaire aux mêmes précautions que les particules de Gauss traitées dans ce mémoire.

Notons, enfin, que, dans le cas de bruit-source à valeur discrète dans un alphabet fini, le nombre de points de discrétisation et leurs positions dans l'espace du bruit sont optimalement donnés par le cardinal et les valeurs de l'alphabet fini  $B$ .

<sup>13</sup>choix expérimental garantissant un bon compromis entre vitesse de convergence et charge de calcul

### 7-3 Décomposition des particules gaussiennes mal conditionnées

Le calibrage du filtre particulaire décrit ci-dessus permet de garantir son bon fonctionnement pour une plage donnée. Dans une application réelle, des baisses significatives temporaires et imprévues de l'observabilité peuvent conduire à la divergence du filtre. En effet, malgré un nombre de particules suffisant pour ces faibles observabilités, l'augmentation des variances des particules gaussiennes engendre un mauvais conditionnement à la marge prévue de linéarisation. Cela se traduit par la distabilisation des filtres locaux et donc la divergence du filtre particulaire.

L'exigence de robustesse doit éviter un tel comportement de tout ou rien : passage abrupt d'un fonctionnement optimal avec fortes précisions à une divergence irréversible du filtre. Pour cela, on introduit dans l'algorithme particulaire une procédure de décomposition des gaussiennes mal conditionnées<sup>14</sup>. Cette procédure correspond à l'ajout d'une contrainte sur les variances particulières des composantes critiques.

Soit  $x_k = \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \theta_k \end{bmatrix}$  vecteur d'état où  $\alpha_k$  est une composante scalaire critique pour la linéarisation et  $\theta_k$  le vecteur contenant les autres composantes.

La particules gaussiennes :

$$p_i(x_k|Y_k) = \mathcal{N}(x_k - \hat{x}^i, P^i)$$

avec  $\hat{x}^i = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}^i \\ \hat{\theta}^i \end{bmatrix}$ ,  $P^i = \begin{pmatrix} P_{\alpha\alpha}^i & P_{\alpha\theta}^i \\ (P_{\alpha\theta}^i)^T & P_{\theta\theta}^i \end{pmatrix}$  et  $P_{\alpha\alpha}^i > S_\alpha$  Seuil de linéarisation, s'écrivent en fonction de la densité conditionnelle marginale de  $\alpha_k$  :

$$\begin{aligned} p_i(x_k|Y_k) &= p_i(\alpha_k|Y_k)p_i(\theta_k|\alpha_k, Y_k) \\ &= \mathcal{N}(\alpha_k - \hat{\alpha}^i, P_{\alpha\alpha}^i) \mathcal{N}(\theta_k - E_i(\theta_k|\alpha_k, Y_k), P_{\theta|\alpha}^i) \end{aligned}$$

avec :

$$E_i(\theta_k|\alpha_k, Y_k) = \hat{\theta}^i + (P_{\alpha\theta}^i)^T (P_{\alpha\alpha}^i)^{-1} (\alpha_k - \hat{\alpha}^i)$$

$$P_{\theta|\alpha}^i = P_{\theta\theta}^i - (P_{\alpha\theta}^i)^T (P_{\alpha\alpha}^i)^{-1} P_{\alpha\theta}^i$$

La densité gaussienne  $p_i(\alpha_k|Y_k)$  de la variable scalaire  $\alpha_k$  peut être approchée par une somme finie de  $L_i$  gaussiennes pondérées de variance  $S_\alpha$  :

$$\mathcal{N}(\alpha_k - \hat{\alpha}^i, P_{\alpha\alpha}^i) \simeq \sum_{l=1}^{L_i} \rho^{i,l} \mathcal{N}(\alpha_k - \hat{\alpha}^{i,l}, S_\alpha)$$

avec :

- $\alpha^{i,l}$  nouvelles positions particulières espacées de  $2\sqrt{S_\alpha}$  et réparties sur l'intervalle<sup>15</sup>  $\left[\hat{\alpha}^i - 2\sqrt{P_{\alpha\alpha}^i}, \hat{\alpha}^i + 2\sqrt{P_{\alpha\alpha}^i}\right]$  de largeur  $4\sqrt{P_{\alpha\alpha}^i}$ , d'où  $L_i = 2\sqrt{\frac{P_{\alpha\alpha}^i}{S_\alpha}}$ .
- $\rho^{i,l}$  poids normalisé de la position particulière  $\alpha^{i,l}$  proportionnel à sa probabilité  $\mathcal{N}(\hat{\alpha}^{i,l} - \hat{\alpha}^i, P_{\alpha\alpha}^i)$ .

<sup>14</sup>i.e. de fortes variances selon les axes d'état critiques pour la linéarisation.

<sup>15</sup>Domaine de confiance retenue pour la densité gaussienne.



D'où la discrétisation fine de la particule (densité de variable vectorielle)  $i$  :

$$\begin{aligned} p_i(x_k|Y_k) &\simeq \left( \sum_{l=0}^{L_i} \rho^{i,l} \mathcal{N}(\alpha_k - \hat{\alpha}^{i,l}, S_\alpha) \right) p_i(\theta_k|\alpha_k, Y_k) \\ &\simeq \sum_{l=0}^{L_i} \rho^{i,l} \mathcal{N}(x_k - \hat{x}^{i,l}, P^{i,l}) \end{aligned}$$

avec,

$$\hat{x}^{i,l} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}^{i,l} \\ \hat{\theta}^{i,l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}^{i,l} \\ \hat{\theta}^i + (P_{\alpha\theta}^i)^T (P_{\alpha\alpha}^i)^{-1} (\hat{\alpha}^{i,l} - \hat{\alpha}^i) \end{bmatrix}$$

et,

$$P^{i,l} = \begin{pmatrix} S_\alpha & P_{\alpha\theta}^{i,l} \\ (P_{\alpha\theta}^{i,l})^T & P_{\theta\theta}^{i,l} \end{pmatrix}$$

où :

$$\begin{aligned} P_{\alpha\theta}^{i,l} &= S_\alpha (P_{\alpha\alpha}^i)^{-1} P_{\alpha\theta}^i \\ P_{\theta\theta}^{i,l} &= P_{\theta\theta}^i - (P_{\alpha\theta}^i)^T (P_{\alpha\alpha}^i)^{-1} (P_{\alpha\theta}^i - S_\alpha (P_{\alpha\alpha}^i)^{-1} P_{\alpha\theta}^i) \end{aligned}$$

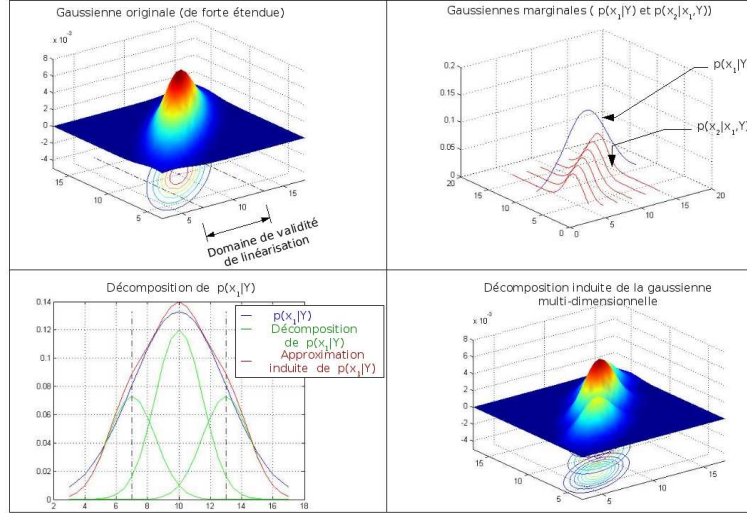


FIG. I.2.7 – Décomposition d'une particule gaussienne

La décomposition des gaussiennes de fortes variances, réalisée axe par axe selon chaque composante critique pour la linéarisation, augmente la cardinalité du support particulaire. Une sélection au sens du maximum de vraisemblance telle que celle réalisée après l'étape de branchement est nécessaire pour maintenir constant le nombre total de particules utilisées. En effet, cette étape est équivalente à un branchement implicite adapté<sup>16</sup> aux particules mal conditionnées.

<sup>16</sup>Pour des considérations de coût algorithmique, un branchement explicite prédéfini (pour une plage de fonctionnement donnée) doit être maintenu. En effet, un tel branchement permet de rejeter une partie de la complexité algorithmique liée à la décomposition à la phase hors-ligne de calibrage du filtre.

## 7-4 Algorithme de décomposition des particules

1. Initialisation du support particulaire.

2. Branchement déterministe

3. Prédiction locales.

3.a- Satisfaction des contraintes de linéarisation de  $f(x, w)$  :

-  $\tilde{N} = NM$ .

- **Pour** toute composante  $\alpha$  critique pour la linéarisation

- **Pour** chaque particule  $i \in \{1, \dots, \tilde{N}\}$

- **Si**  $P_{\alpha\alpha}^i > S_\alpha$  (Dépassement de  $S_\alpha$  seuil de linéarisation selon  $\alpha$ .)

- Décomposition de la particule  $i$  en  $L_i = 2\sqrt{\frac{P_{\alpha\alpha}^i}{S_\alpha}}$  nouvelles :

$$\begin{aligned} p^i(x_k|Y_k) &= p^i(\alpha_k|Y)p^i(\theta_k|\alpha_k, Y) \\ &\simeq \left( \sum_{j=1}^{L_i} \rho_{i,j} p^{i,j}(\alpha_k|Y_k) \right) p^i(\theta_k|\alpha_k, Y) \\ &\simeq \sum_{j=1}^{L_i} \rho_{i,j} p^{i,j}(x_k|Y_k) \end{aligned}$$

- Mise à jour du nombre total de particules :

$$\tilde{N} = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} L_i$$

- Sélection des  $NM$  particules les plus massives parmi les  $\tilde{N}$  existantes.

3.b- Prédiction locales par Kalman-étendus

4. Corrections locales.

4.a- Satisfaction des contraintes de linéarisation de  $h(x)$  :

-  $\tilde{N} = NM$ .

- **Pour** toute composante  $\alpha$  critique pour la linéarisation

- **Pour** chaque particule  $i \in \{1, \dots, \tilde{N}\}$

- **Si**  $P_{\alpha\alpha}^i > S'_\alpha$  (Dépassement de  $S'_\alpha$  seuil de linéarisation selon  $\alpha$ .)

- Décomposition de la particule  $i$  en  $L_i = 2\sqrt{\frac{P_{\alpha\alpha}^i}{S'_\alpha}}$  nouvelles.

- Mise à jour du nombre total de particule  $\tilde{N} = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} L_i$ .

- Sélection des  $NM$  particules les plus massives parmi les  $\tilde{N}$  existantes.

4.b- Corrections locales par Kalman-étendus

5. Pondérations

6. Sélections :

6.a- Sélection locale (Exclusions mutuelles).

6.b- Sélection déterministe.

7. Estimation.

## 8 Algorithme du Filtre à particules déterministes de Gauss

### 1. Initialisation :

Le support initial, caractérisé par l'ensemble des moyennes et covariances

$\{x_0^i, P_0^i\}_{i=1}^N$ , doit vérifier trois points :

- Assurer la validité locale de la linéarisation. Chacune des particules doit être affectée d'une covariance adaptée aux limites de linéarisation.
- Garantir la couverture de l'espace d'incertitude initial avec un support particulaire "jointif" dans les régions les plus pertinentes (distance inter-particules) afin de couvrir tout l'espace d'état utile.
- Approcher au mieux la densité de probabilité initiale de l'état et notamment l'ordre des vraisemblances dans l'affectation de poids aux probabilités des positions occupées par les particules.

### 2. Exploration :

A l'instant  $k - 1$ , on dispose pour chaque particule  $i$  dans  $\{1, \dots, N\}$ , de la séquence  $W_{k-1}^i$  de vraisemblance  $V_{k-1}^i$ . Toutes les  $M$  hypothèses  $w_k^i = w_j$  correspondant à la discrétisation du bruit de dynamique sont explorées.

### 3. Prédiction locales :

#### 3-a. Décomposition des particules :

- Pour toute composante  $\alpha$  critique pour la linéarisation :
  - Décomposition des particules gaussiennes violant la contrainte de linéarisation de  $f(x, w)$  selon l'axe  $\alpha$ .
  - Mise à jour du nombre total de particules.
- Sélection des  $NM$  particules les plus massives.

#### 3-b. Calcul des densités élémentaires $p^i(x_k|Y_{k-1})$ :

La prédiction de l'état particulaire  $x_{k|k-1}^i$  s'effectue par :

$$x_{k|k-1}^i = f_{k-1}(x_{k-1|k-1}^i, w_k^i) \quad (2.12)$$

La covariance de l'erreur de prédiction  $P_{k|k-1}^i$  s'obtient après linéarisation de l'équation de dynamique :

$$x_k = x_{k|k-1}^i + F_{k-1}^{x,i}(x_{k-1} - x_{k-1|k-1}^i) + F_{k-1}^{w,i}(w_k - w_k^i) \quad (2.13)$$

où  $F_{k-1}^{x,i}$  (respect.  $F_{k-1}^{w,i}$ ) désigne le jacobien de  $f$  par rapport à l'état  $x$  (respect. le bruit  $w$ ) calculé au point  $(x_{k-1|k-1}^i, w_k^i)$  (le long de la trajectoire particulaire), on obtient alors :

$$P_{k|k-1}^i = F_{k-1}^{x,i} P_{k-1}^i F_{k-1}^{x,i T} + F_{k-1}^{w,i} q_i F_{k-1}^{w,i T} \quad (2.14)$$

### 4. Corrections locales :

#### 4-a. Décomposition des particules :

- Pour toute composante  $\alpha$  critique pour la linéarisation :
  - Décomposition des particules gaussiennes violant la contrainte de linéarisation de  $h(x)$  selon l'axe  $\alpha$ .
  - Mise à jour du nombre total de particule.
- Sélection des  $NM$  particules les plus massives.

4-b. **Calcul des densités élémentaires**  $p^i(x_k|Y_k)$  :

$x_{k|k}^i$  et  $P_k^i$  sont obtenus comme dans l'étape de correction de filtrage de Kalman étendu :

$$\begin{cases} x_{k|k}^i = x_{k|k-1}^i + K_k^i(y_k - h_k(x_{k|k-1}^i)) \\ K_k^i = P_{k|k-1}^i H_k^{iT} (H_k^i P_{k|k-1}^i H_k^{iT} + R_k)^{-1} \\ P_k^i = P_{k|k-1}^i - K_k^i H_k^i P_{k|k-1}^i \end{cases} \quad (2.15)$$

où  $H_k^i$  désigne le Jacobien de  $h$  par rapport à l'état  $x$  calculé en  $x_{k|k-1}^i$ .

5. **Calcul des vraisemblances** :

On calcule les  $MN$  vraisemblances des séquences  $\{\{W_{k-1}^i, w_k^i = w_j\}_{j=1}^M\}_{i=1}^N$  par l'équation réursive :

$$V_k^{i,j} = V_{k-1}^i + V(y_k|x_{k-1}^i, w_k^i = w_j) + V(w_k^i = w_j) \quad (2.16)$$

6. **Sélections** :

6-a. **locale** : Élimination des particules chevauchant des particules plus massives.

6-b. **globale** : Parmi les possibilités explorées restantes, les  $N$  trajectoires particulières possédant les vraisemblances les plus élevées sont sélectionnées.

7. **Estimation** :

L'estimateur à maximum de vraisemblance coïncide avec la séquence particulière

$$(\hat{x}_0, \hat{W}_k) \simeq (x_0^{i_{max}}, W_k^{i_{max}}) \text{ où } i_{max} = \arg \max_{i=1, \dots, N} V_k^i \quad (2.17)$$

Plus le nombre de particules est élevé, mieux on approche l'optimum théorique (inaccessible de manière réalisable).

**Remarque 8.1**

*Les algorithmes à particules de Dirac ou à particules de Dirac-Gauss sont obtenus en remplaçant les prédictions et corrections locales, la mise à jour des vraisemblance et la sélection locale (exclusion mutuelle) par celles correspondantes pour les particules utilisées. Ce qui revient, tout simplement, à annuler les variances des composantes ponctuelles de chaque particule.*

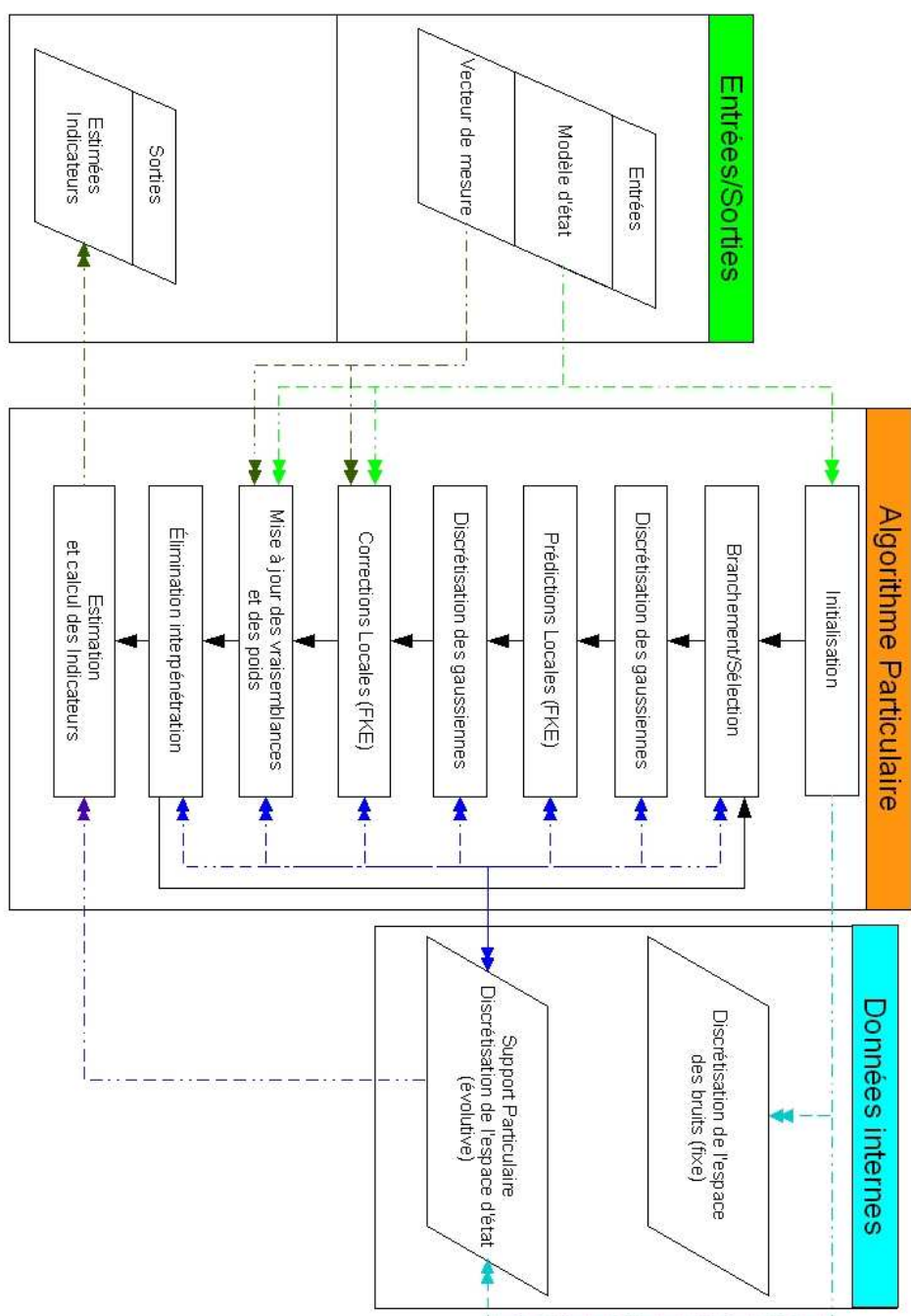


FIG. I.2.8 – Organigramme du filtre particulaire

## 9 Convergences du Filtre Particulaire déterministe

Le défaut d'indépendance des filtres particuliers aléatoires se retrouve ici dans le défaut d'exhaustivité de la sélection.

Toutefois, la concentration a posteriori des particules dans les régions les plus pertinentes de l'espace d'état, la redondance minimale entre particules et la finitude de la variance conditionnelle du processus estimé permettent d'arguer sur la vraisemblance de la convergence uniforme dans le temps, sans pour autant en apporter une preuve rigoureuse.

La convergence pour un instant  $k$  donné s'obtient simplement par la convergence du filtre "exhaustif" à  $N_0 M^k$  particules. Ce qui, à horizon temporel illimité, correspond à une mise en œuvre à nombre de particules variables de l'algorithme déterministe. Notons que, dans le cas de particules gaussiennes, un tel algorithme est équivalent au filtre à sommes augmentantes de gaussiennes [Sorenson 71].

## 10 Extension à l'estimation à minimum de variance

L'estimée à minimum de variance étant donnée par :

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k|k} &= \int x p(x_k | Y_k) dx \\ &= \int x \left( \int p(X_k | Y_k) dX_{k-1} \right) dx\end{aligned}$$

Elle peut être approchée par

$$\hat{x}_{k|k} \simeq \sum_{i=1}^N \rho_i \hat{x}_{k|k}^i \quad (2.18)$$

avec :

- $p_N(X_k | Y_k) = \sum_{i=1}^N \rho_i p_i(X_k | Y_k)$  approximation particulaire de la densité de probabilité conditionnelle trajectorielle.
- $p_i(x_k | Y_k) = \int p_i(X_k | Y_k) dX_{k-1}$  marginale de la densité de probabilité élémentaire conditionnelle à la particule  $i$ .
- $\hat{x}_{k|k}^i$  moyenne de  $p_i(x_k | Y_k)$  et point terminal de la trajectoire particulaire  $\hat{X}_{k|k}^i$ .

La probabilité marginale (état courant) étant fonction de la probabilité trajectorielle, on peut aisément adapter les résultats précédents à l'estimation à minimum de variance, en changeant de critère de sélection.

En effet, les redistributions à maximum de vraisemblance sont inadaptées à la détermination de la moyenne, car non conforme en loi comme le montre la figure I.2.9. La même remarque s'applique à toute autre sélection non-conforme en loi (seuils, etc.), telle que suggérée dans [Sorenson 71].

### Sélection à minimum de variance

Un critère de sélection adapté au minimum de variance doit être conforme à la variance globale du support particulaire. En effet, la variance minimisée par le critère d'estimation, pour la probabilité

conditionnelle approchée  $P_{NM}(x_k|Y_k)$ , s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{NM}(\bar{x}_k) &= E_{P_{NM}}((x_k - \bar{x}_k)(x_k - \bar{x}_k)^T) \\ &= \sum_{i=1}^{NM} \rho^i \left( (\bar{x}_k - \hat{x}_k^i)(\bar{x}_k - \hat{x}_k^i)^T + P_{k|k}^i \right)\end{aligned}\quad (2.19)$$

avec  $P_{k|k}^i$  variance de la particule  $i$  (nulle pour des particules de Dirac).

Or, après élimination de la particule  $j$ , l'approximation de la densité de probabilité conditionnelle est donnée par :

$$P_{NM-1}^j(x_k|Y_k) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{NM} \frac{\rho_i}{1 - \rho_j} p_i(x_k|Y_k)$$

et la variance, autour de  $\bar{x}_k$ , s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{NM-1}^j(\bar{x}_k) &= E_{P_{NM-1}^j}((x_k - \bar{x}_k)(x_k - \bar{x}_k)^T) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{NM} \frac{\rho_i}{1 - \rho_j} \left( (\bar{x}_k - \hat{x}_k^i)(\bar{x}_k - \hat{x}_k^i)^T + P_{k|k}^i \right)\end{aligned}\quad (2.20)$$

Le critère proposé ici consiste à minimiser la distance  $\left\| \mathcal{V}_{NM} - \mathcal{V}_{NM-1}^j \right\|_{P_{NM}}$  :

$$\min_j \|\Delta \mathcal{V}_j\|^2 = \min_j \left( \left\| \mathcal{V}_{NM}(\hat{x}) - \mathcal{V}_j(\hat{X}) \right\|^2 + 2 \|x^j - \hat{x}\|^2 \|\mathcal{V}_{NM}(\hat{x})\| \right)$$

La procédure de sélection consiste alors à éliminer récursivement  $NM - N$  particules du support particulaire initial pour n'en garder que les  $N$  meilleures en ce sens.

#### **Sélection des particules :**

- **Pour**  $l \in \{1, \dots, NM - N\}$ 
  - Calcul du critère de sélection  $\|\Delta \mathcal{V}_i\|^2$  pour toutes les particules candidates.
  - Elimination de la particule  $j = \arg \min_i \|\Delta \mathcal{V}_i\|^2$ .
  - Renormalisation des poids  $\rho_i$  des particules survivantes.

#### **Remarque 10.1**

*Sortant du cadre de ce mémoire sur le maximum de vraisemblance trajectoriel, l'algorithme de sélection décrit ci-dessus n'est qu'une ébauche. Une étude approfondie de sa mise en œuvre, son coût et ses performances est nécessaire pour le valider.*

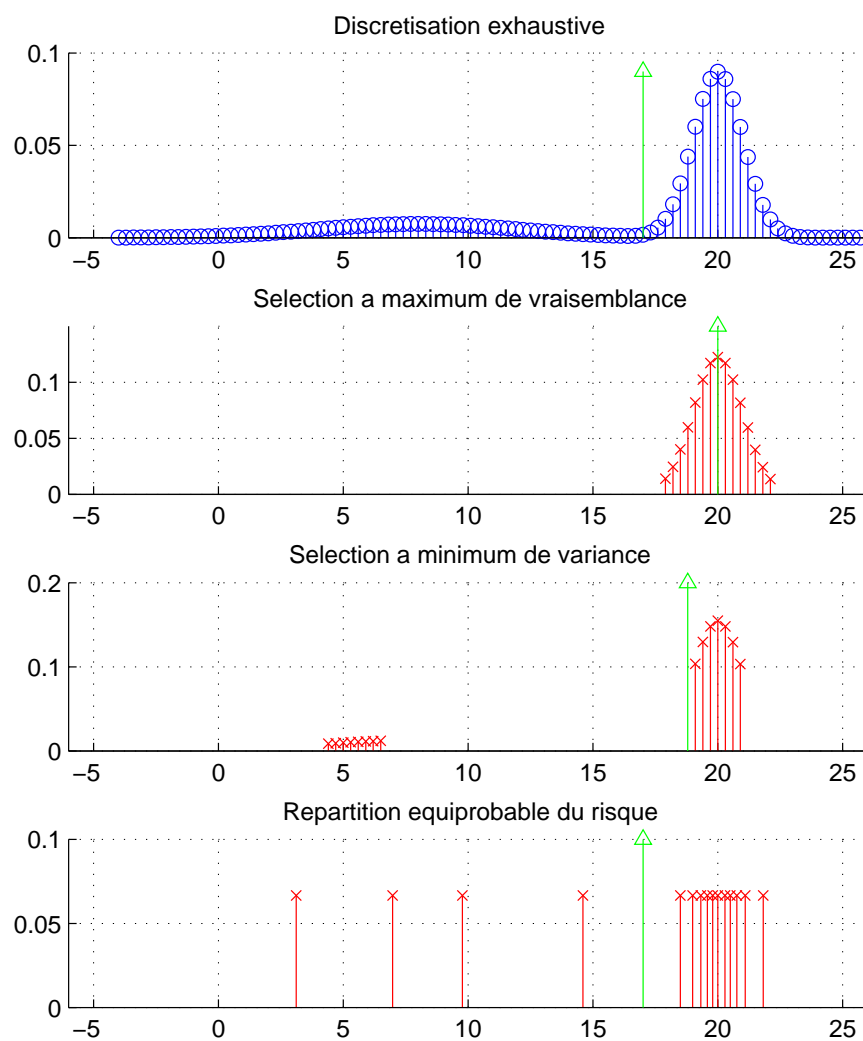


FIG. I.2.9 – Comparaison des critères de sélection dans un cas scalaire bimodal



## 11 Conclusion

Le filtre à particule déterministe de Gauss permet d'apporter une solution numérique au problème d'estimation à maximum de vraisemblance trajectorielle dans le cas général de variable d'état continue. Doté de procédures (exclusion mutuelle, décomposition de gaussiennes) évitant la dissipation des ressources dans des redondances inutiles et renforçant la robustesse, il optimise l'utilisation des ressources de calcul disponibles pour l'approximation de l'estimée. C'est grâce au développement parallèle de cette technique et de deux de ses applications (Radar et GPS) concentrant un grand nombre des difficultés rencontrées en traitement de signal non-linéaire (fortes dynamiques, faible observabilité, incohérence, variables hybrides) que la méthode a pu être complétée, notamment par :

- l'identification des problèmes liés à la limitation du nombre de particules ( la convergence à l'infinie ne garantissant pas l'optimalité de l'exploitation des ressources),
- l'introduction de procédures cohérentes avec l'interprétation particulière et l'objectif du filtrage, permettant de pallier au mieux le manque inhérent d'exhaustivité.

L'extension aux critères marginaux (minimum de variance, maximum de vraisemblance marginale), abordée à la fin de ce chapitre, est purement illustrative. Plus généralement, une nouvelle technique de redistribution déterministe conforme en loi est envisageable.

## Chapitre 3

# Application à la boucle de verrouillage de phase

### 1 Introduction

La poursuite de phase est un problème critique pour un grand nombre d'application du traitement de signal. En effet, les techniques, basées sur Emission/Réception de signal pour échange ou collecte d'information (Telecommunication, Radar, GPS, Sonar...), utilise la modulation d'une porteuse sinusoïdale pour la transmission efficace du signal à travers le canal de transmission. Ce canal de transmission déforme le signal émis par atténuation d'amplitude, décalage de fréquence et déphasage. Après démodulation, l'information utile comprend la part sinusoïdale résultant de ces perturbations. La réception optimale nécessite, donc, outre l'acquisition et la poursuite des paramètres du signal utile, celles des paramètres sinusoïdaux restants après l'effet du canal de transmission. Ce dernier problème correspond à la poursuite d'une sinusoïde complexe bruitée de fréquence, d'amplitude et de phase perturbées par des bruits de dynamique.

La poursuite de phase correspond au problème d'estimation du signal Doppler de forte dynamique dans les problèmes de localisation et de positionnement par Emission/Réception de signal électromagnétique abordés dans ce mémoire. Le Doppler est d'importance capitale pour la réception optimale des signaux Radar/GPS, car son estimation conjointement aux autres paramètres du problème garantit l'optimalité des performances du filtrage. D'autre part, fonction de la vitesse relative Emetteur/Récepteur, sa poursuite permet d'améliorer la précision de la prédiction inhérente à l'estimation optimale.

L'estimation de la phase Doppler présente de fortes non-linéarités. Elle ne peut être traitée optimalement, de façon globale, par les techniques classiques, notamment dans le cas de forte dynamique et de faible observabilité.

Une solution à particules déterministes de Gauss pour le problème de verrouillage de phase sous forte dynamique et faible observabilité est présentée dans ce chapitre. Ses performances y sont comparées à celles obtenues par un banc de filtres de Kalman étendus, technique optimale pour de faible bruit de dynamique, afin de montrer l'apport de la discrétisation de l'espace des bruits. De plus, outre les performances en filtrage, les résultats numériques du lisseur particulaire déterministe sont reportés. Enfin, pour une meilleur illustration de l'intérêt de l'étape d'exclusion mutuelle des particules gaussiennes, les performances avec et sans cette étape sont comparées pour un problème de

poursuite de phase cohérente par intervalle. En effet, ce problème, d'un réel intérêt dans la poursuite de cible scintillante pour le problème radar, favorise le recouvrement entre particules. Il montre bien, d'une part, la réduction de la complexité algorithmique apportée par la non-interpénétration, et d'autre part, la garantie de la stabilité du filtre pour des traitements de longues durées qu'elle permet.

## 2 Modélisation du problème

Dans un problème de poursuite de phase, le signal reçu est donnée par l'équation d'observation :

$$y_k = A_k \exp^{-j\phi_k} + v_k$$

avec,  $A_k$  Amplitude du signal,  $\phi_k$  sa phase et  $v_k$  un bruit blanc gaussien complexe de variance  $R$ . Dans le cas de forte dynamique, la variation de la phase peut être décrite par ses deux premières dérivées :

- $f_k$  sa fréquence,
- $\Delta f_k$  taux de variation de la fréquence ( $\equiv$  accélération en cinématique)

La variables d'état est, alors, un vecteur de  $\mathbf{R}^4$  donné par :

$$x_k = \begin{pmatrix} A_k \\ \phi_k \\ f_k \\ \Delta f_k \end{pmatrix}$$

et dont la dynamique est gouvernée par l'équation d'état :

$$\begin{cases} A_k = A_{k-1} + \rho_k \\ \phi_k = \phi_{k-1} + 2\pi f_{k-1}T + \epsilon_k \theta_k \\ f_k = f_{k-1} + \Delta f_{k-1}T \\ \Delta f_k = \Delta f_{k-1} + \Pi_k w_k \end{cases}$$

avec :

- $\epsilon_k$  un bruit Poissonien indépendant de fréquence  $\lambda_\epsilon$  modélisant l'occurrence d'un saut incohérent sur la phase ( $\lambda_\epsilon = 0$  pour une phase cohérente),
- $\theta_k$  la valeur du saut de phase indépendant uniformément distribué sur  $[-\pi, \pi]$ ,
- $\rho_k$  un bruit blanc gaussien de variance  $\sigma_\rho$  qui représente la dérive de l'amplitude du signal,
- $\Pi_k$  un bruit Poissonien indépendant de fréquence  $\lambda_\Pi$  représentant l'occurrence d'un changement de dynamique de la fréquence ( $\equiv$  commande de pilotage pour un avion),
- $w_k$  un bruit blanc gaussien de variance  $\sigma_w$  ( $\equiv$  consigne d'accélération en cinématique),
- et  $T$  période d'échantillonnage.

## 3 Solution à particules déterministes de Gauss

### 3-1 Phase cohérente

Dans un premier temps, nous nous intéressons au problème de poursuite de phase cohérente (ie  $\lambda_\epsilon = 0$ ).

L'application de la technique à particules déterministes de Gauss nécessite la garantie de validité des linéarisations locales du modèle durant tout le traitement, tant en régime transitoire qu'en régime permanent. Ceci impose par une discrétisation suffisamment fine par des particules gaussiennes de

l'espace d'incertitude initiale (régime transitoire), ainsi que des domaines des bruits de dynamique (régime permanent).

Les paramètres de ces discrétisations sont obtenues par une étude fine a priori de la dynamique du système et de la sensibilité de l'observation, que nous décrivons ci-après.

### 3-1-1 Linéarisation du modèle d'état

Comme il est bien connu, le cercle trigonométrique de l'exponentielle complexe peut être linéarisé de façon "minimaliste" par quatre segments de droite des intervalles de largeur  $\frac{\pi}{2}$ . L'incertitude initiale sur la phase peut, donc, être discrétisée par des particules gaussiennes dont l'écart-type n'excède pas  $\frac{\pi}{4}$ .

La garantie de la validité de la linéarisation en régime transitoire nécessite aussi la discrétisation des fréquences et de leurs taux de variation. Leurs pas de discrétisation sont dictés par le respect des contraintes de linéarisation sur la phase. L'évolution des incertitudes des particules gaussiennes étant donnée par l'équation de Riccati, sa simulation (à défaut de résolution analytique) permet de fixer les pas de discrétisation de toutes les variables d'état, ainsi que le nombre de particule  $N_0$  nécessaire pour l'approximation de la densité de probabilité initiale  $p(x_0)$ .

De même, les pas de discrétisation des bruits de dynamique, et donc le nombre  $M$  de discrétisation du bruit de dynamique, doivent garantir la validité de la linéarisation en régime permanent. Ils peuvent, aussi, être obtenus par simulation de l'équation de Riccati pour les conditions extrêmes d'accrochage du filtre souhaitées. Notons que pour le cas d'application considéré, seul le bruit dynamique à occurrence poissonnienne  $\Pi_k w_k$  requiert une discrétisation fine.

### 3-1-2 Algorithme de Poursuite de phase cohérente avec des particules déterministes de Gauss

#### – Initialisation :

Répartition équidistante des particules gaussiennes  $\{x_0^i\}_{i=1}^N$  sur l'espace d'incertitude initiale.  
Attribution d'une même variance a priori aux particules élémentaires,  
Répartition des poids de particules selon la densité de probabilité apriori de l'état,

$$\rho_i = \frac{p_0(x_0^i)}{\sum_l p_0(x_0^l)} \quad (3.1)$$

#### – Elimination d'Interpénétration(Sélection locale) :

- **Pour** chaque paire de particules  $(i, l)$ ,
- **Si** intersection de leurs noyaux solides i.e.  $\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_l \neq \emptyset$
- élimination de la particule de plus faible poids  $\min(\rho_i, \rho_l)$ .

#### – Exploration/Sélection globale :

- **Pour** chaque particules  $i$ ,
- **Pour** chaque hypothèse  $w_{k+1} = w_j$  de la discrétisation du bruit  $\Pi_k w_k$
- Calcul du poids a priori de la trajectoire  $(i, j)$  :

$$\rho_{i,j} = \rho_i \rho_j^w \quad (3.2)$$

- Sélection des  $N$  trajectoires particulières les plus massives.

– **Etape de prédiction :**

La prédiction de l'état particulaire  $x_{k|k-1}^i$  s'effectue par :

$$x_{k|k-1}^i = f_{k-1}(x_{k-1|k-1}^i, w_k^i) \quad (3.3)$$

La covariance de l'erreur de prédiction  $P_{k|k-1}^i$  s'obtient après linéarisation de l'équation de dynamique :

$$x_k = x_{k|k-1}^i + F_{k-1}^{x,i}(x_{k-1} - x_{k-1|k-1}^i) + F_{k-1}^{w,i}(w_k - w_k^i) \quad (3.4)$$

où  $F_{k-1}^{x,i}$  (respect.  $F_{k-1}^{w,i}$ ) désigne le jacobien de  $f$  par rapport à l'état  $x$  (respect. le bruit  $w$ ) calculé au point  $(x_{k-1|k-1}^i, w_k^i)$  (le long de la trajectoire particulaire), d'où :

$$P_{k|k-1}^i = F_{k-1}^{x,i} P_{k-1}^i F_{k-1}^{x,i T} + F_{k-1}^{w,i} \sigma_i F_{k-1}^{w,i T} \quad (3.5)$$

– **Etape de correction :**

$x_{k|k}^i$  et  $P_k^i$  sont obtenus comme dans l'étape de correction de filtrage de Kalman étendu :

$$\begin{cases} x_{k|k}^i = x_{k|k-1}^i + K_k^i (y_k - h_k(x_{k|k-1}^i)) \\ K_k^i = P_{k|k-1}^i H_k^i T (H_k^i P_{k|k-1}^i H_k^i T + R_k)^{-1} \\ P_k^i = P_{k|k-1}^i - K_k^i H_k^i P_{k|k-1}^i \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $H_k^i$  désigne le Jacobien de  $h$  par rapport à l'état  $x$  calculé en  $x_{k|k-1}^i$ .

– **Calcul des vraisemblances et mise à jour des poids :**

On calcule les  $N$  vraisemblances des séquences  $\{(X_k^i, w_{k+1}^i = w_j)_{i=1}^N$  par l'équation récursive :

$$V_{k+1}^i = V_k^i + V(y_{k+1}|x_k^i, w_{k+1}^i = w_j) + V(w_{k+1}^i = w_j) \quad (3.7)$$

Calcul des nouveaux poids normalisés,

$$\rho_{k+1}^i = \frac{\exp(V_{k+1}^i)}{\sum_{\iota} \exp(V_{k+1}^{\iota})} \quad (3.8)$$

– **Estimation :**

L'estimateur à maximum de vraisemblance coïncide avec la séquence particulaire

$$(\widehat{x}_0, \widehat{W}_k) \simeq (x_0^{i_{max}}, W_k^{i_{max}}) \text{ où } i_{max} = \arg \max_{i=1, \dots, N} V_k^i \quad (3.9)$$

**Remarque 3.1 :**

- La sélection globale a priori permet la mise en œuvre de  $N$  Filtres de Kalman étendus et donc une meilleur appréciation de la complexité algorithmique à travers le nombre de particules.
- La sélection locale est remplacée par une élimination d'interpénétration antérieure au branchement. Ceci permet de réduire le nombre de tests d'interpénétration (mis en œuvre sur un support de  $N$  particules plutôt que  $NM$ ) au prix d'un taux de recouvrement inhérent à une unique étape de branchement.
- Les étapes d'exploration/sélection globale et d'élimination d'interpénétration sont mises en œuvre de façon intermittente pour une réduction de la complexité algorithmique. Leur intermittence est déduite du temps de réponse du système dynamique aux sauts de commande d'accélération.

### 3-2 En présence d'incohérence de phase

En présence d'incohérence de phase à occurrence poissonnienne, le filtre particulaire doit être capable de détecter l'occurrence d'une incohérence et d'acquérir sa valeur.

L'occurrence poissonnienne des fluctuations, et les contraintes de linéarisation sur la phase nécessitent la discrétisation de la densité de probabilité du bruit  $\epsilon_k \theta_k$ , et donc une étape supplémentaire de Branchement/Sélection de ce bruit de phase au même titre que le bruit des taux de variation de fréquence  $\Pi_k w_k$ .

## 4 Résultats numériques

### 4-1 Performances en filtrage et Lissage des particules déterministes de Gauss

#### 4-1-1 Paramètres d'état

- Rapport S/B :  $-10 \text{ dB}$ ,
- $T$  :  $1 \text{ ms}$ ,
- Amplitude :  $\sim 1$
- Incertitude initiale de fréquence :  $[0, 1000] \text{ Hz}$ ,
- Incertitude initiale de la phase :  $[-\pi, \pi]$ ,
- Plage des commandes sur le taux de variation de fréquence :  $[-500, 500] \text{ Hz/s}$ ,
- $\lambda_\Pi = 1 \text{ Hz}$ ,
- $\sigma_w = 25 \cdot 10^4$ ,
- $\sigma_{rho} = 10^{-6}$ .

#### 4-1-2 Paramètres du filtre

- Nombre total de particules  $N = 1000$ ,
- Nombre de points de discrétisation du bruit de dynamique  $M = 10$ ,

#### Remarque 4.1

Les résultats numériques présentés ici ont été réalisés pour l'algorithme particulaire sans exclusion mutuelle. Les performances obtenues restent toutefois très illustratives, bien que "sous-optimales" en terme de réduction du nombre de particules utilisées. En effet, le bruit  $\Pi_k w_k$  est dispersif<sup>1</sup>. Par un choix "judicieux" de l'intermittence de Branchement/Sélection, le recouvrement est réduit à celui inhérent à la mobilité locale par FKE conditionnel des particules gaussiennes. Ceci explique le gain considérable en complexité algorithmique dans l'exemple présenté à la section 4-3.

#### 4-1-3 Résultats numériques

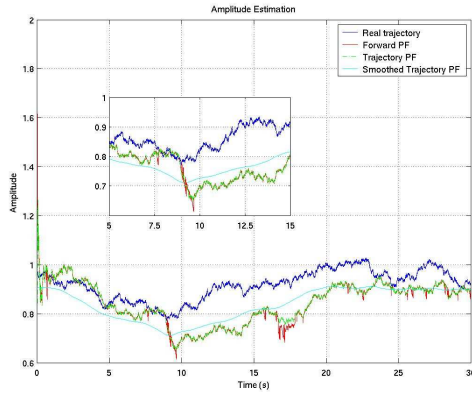
La figure I.3.1 présente les performances du filtre particulaire pour les trois étapes de l'estimation à maximum de vraisemblance :

- opération de filtrage (avant) : à chaque instant  $k$ , le filtre délivre le point terminal de la trajectoire à maximum de vraisemblance  $\hat{x}_{k|k}^{i_{max}}$  avec  $i_{max} = \arg \max_i (\rho_{k|k}^i)$ .
- trajectoire à maximum de vraisemblance avant lissage : délivrée à la fin du traitement  $(\hat{x}_{k|k}^{i_{max}})_{k=0}^{T_f}$  avec  $i_{max} = \arg \max_i (\rho_{T_f|T_f}^i)$ .

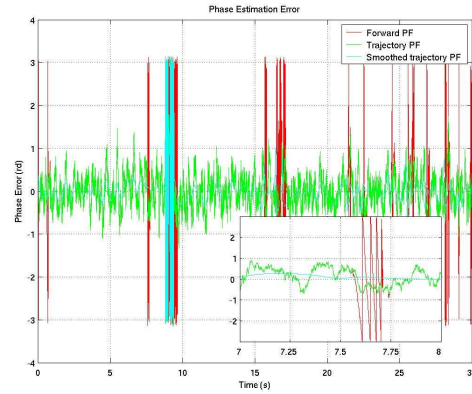
---

<sup>1</sup> $df_k = (d\Delta f_0)kT$  et  $d\phi_k = (d\Delta f_0)\frac{(k+1)}{2}kT^2$ , avec :  $(d\Delta f_0)$  erreur initiale sur la commande,  $df_k$  et  $d\phi_k$  erreurs induites sur la fréquence et la phase à l'instant  $k$ . Une intermittence de  $k_{BS}$  itérations se traduit par une erreur de phase croissante donnée par :  $d\phi_k = (d\Delta f)k_{BS}(\frac{(k_{BS}+1)}{2} + k - k_{BS})T^2$  pour  $k > k_{BS}$

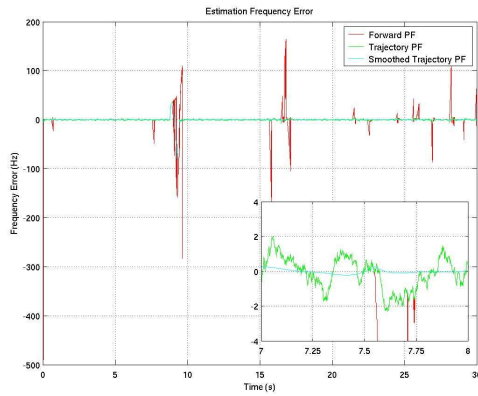
- estimée à maximum de vraisemblance trajectorielle :  $(\hat{x}_{k|T_f}^{i_{max}})_{k=0}^{T_f}$  avec  $i_{max} = \arg \max_i (\rho_{T_f}^i)$ .



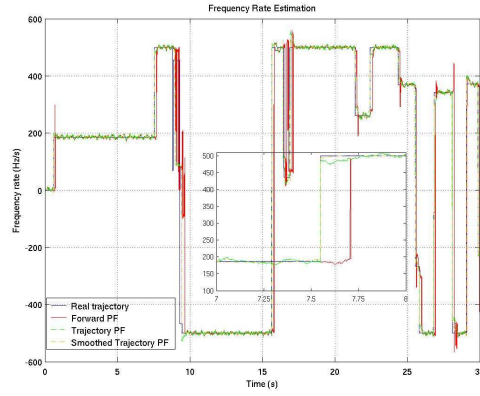
Estimation de l'amplitude



Erreur d'estimation de la phase



Erreur d'estimation de la fréquence



Estimation du taux de variation de la fréquence

FIG. I.3.1 – Performances des particules déterministes gaussiennes pour le filtrage et le lissage en verrouillage de phase sous  $-10\text{ dB}$

## 4-2 Comparaison à un banc de filtre de Kalman étendu

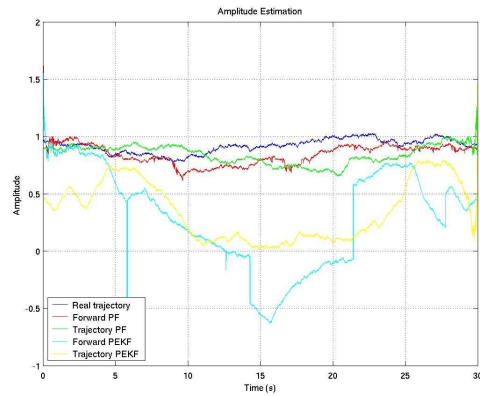
Les performances de l'estimation temps-réel (filtre avant) et trajectorielle des particules déterministes de Gauss sont comparées à ceux d'un banc de 200 FKE<sup>2</sup> parallèles. La limitation du nombre des FKE a été imposée par les limitations des capacités mémoires de la machine utilisée pour les expériences. En effet, l'absence de passé trajectoriel lointain commun de ces filtres n'autorise pas le recours à des mise en œuvre par allocation dynamique de la mémoire. Malgré le nombre élevé de particules 1000, la taille mémoire utilisée par le filtre particulaire est stable assez rapidement. En effet, la capacité de mémoire nécessaire à la création de nouvelles branches particulières est de taille sensiblement égale à celle libérée par les trajectoires éliminées après une longue intégration

<sup>2</sup>pour lesquels, le bruit gaussien à occurrence poissonnienne  $\Pi_k w_k$  est approché, comme d'usage, par un bruit blanc gaussien de variance  $\lambda_{\Pi} \sigma_w$ .

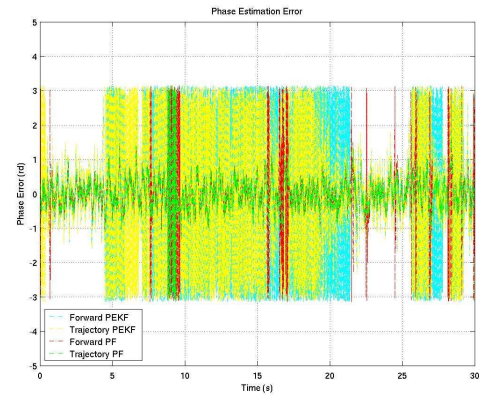
cohérente.

On note bien, d'après les premières secondes de traitement ( $\sim 5s$  figure I.3.2) que la divergence du FKE parallèle n'est pas due à un défaut de finesse de l'initialisation (nombre de filtre utilisé), mais à un problème, plus fondamental, lié à l'approximation linéaire globale (i.e. non segmentaire) inhérente au FKE.

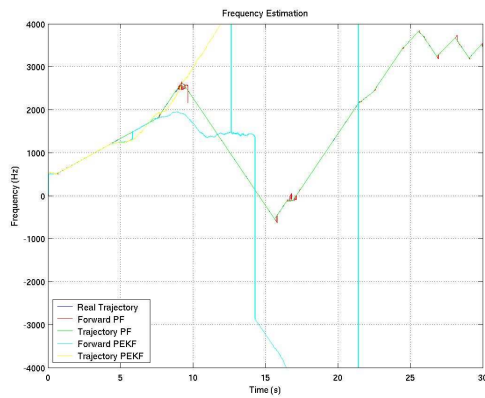
Des tests réalisés avec un nombre plus élevé de FKE (jusqu'à 1000) sans mémoire trajectorielle, présentent un comportement sensiblement identique à celui présenté ici.



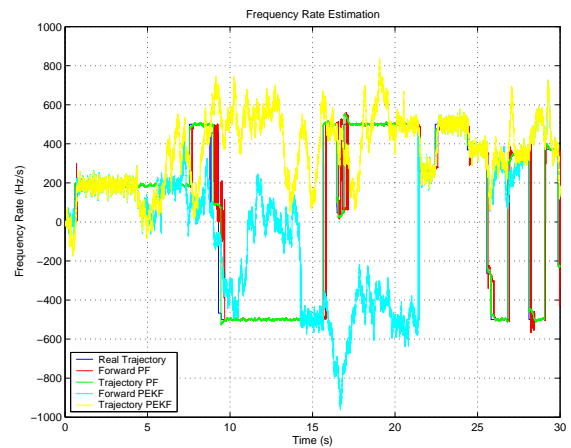
Estimation de l'amplitude



Erreur d'estimation de la phase



Estimation de la fréquence



Estimation du taux de variation de la fréquence

FIG. I.3.2 – Comparaisons des performances temps-réel et trajectorielles des particules déterministes de Gauss à celles d'un banc de FKE parallèles sous  $-10\text{ dB}$



### 4-3 Amélioration des performances par l'exclusion mutuelle des particules

Pour mieux illustrer l'amélioration de performances par l'exclusion mutuelle, nous présentons, ici, une application des particules déterministes de Gauss avec et sans cette étape pour le problème de verrouillage de phase avec incohérence à occurrence poissonnienne. En effet, la phase n'est pas un paramètre de commande pour les autres composantes de vecteur d'état. Donc, l'erreur introduite par saut de phase entre deux hypothèses particulières est stationnaire. Elle s'estompe asymptotiquement par l'estimation locale réalisée par les particules de Gauss. Le recouvrement est alors accentué, et la saturation du support particulaire est plus perceptible.

L'expérience est menée pour des paramètres d'état similaires aux cas précédents, avec  $\lambda_\epsilon = 0.5Hz$ .

*Paramètres du filtre à particules déterministes de Gauss (Overlapping DGP) :*

- $N = 4000$ ,
- $M_{\Pi w} = 10$ ,
- $M_{\epsilon\theta} = 8$ .

*Paramètres du filtre à particules déterministes de Gauss non-interpénétrantes (Non-Overlapping DGP) :*

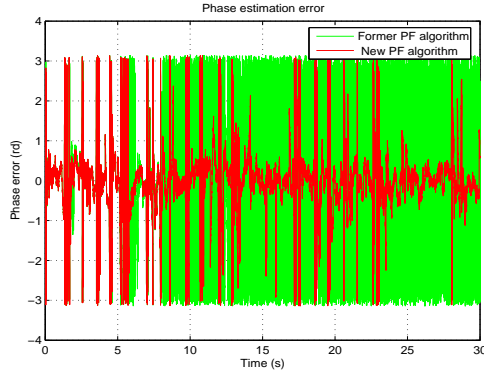
- $N = 400$ ,
- $M_{\Pi w} = 10$ ,
- $M_{\epsilon\theta} = 8$ ,
- Seuil de recouvrement :  $\alpha = 1/3$

Malgré le nombre de particules restreint (1/10), le filtre avec recouvrement minimal est plus stable grâce à un meilleur remplissage de l'espace d'état conforme au critère d'estimation et à l'interprétation déterministe du maillage particulaire.

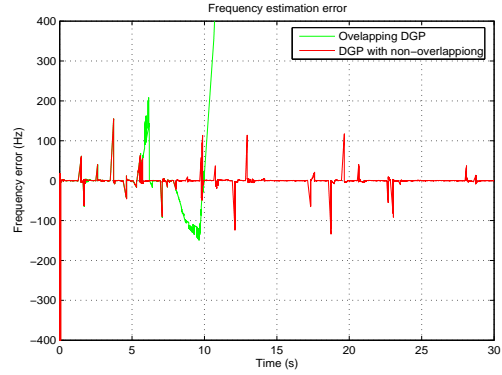
La figure I.3.3 (d) montre la concentration des particules autour de la plus massive. Pour l'algorithme sans restriction de l'interpénétration (courbe en vert fig. I.3.3 (d)), la concentration particulaire croît très rapidement pendant les régimes "stationnaires" ( $\Pi = 0$  et  $\epsilon = 0$ ). Ceci montre que, contrairement aux attentes, la pertinence d'une fine région  $D$  de l'espace d'état s'exprime à travers les poids et la concentration des particules qui l'occupent  $\sum_{\hat{x}_i \in D} \rho_i$ . De plus, cette concentration importante empêche l'exploration des trajectoires d'état les moins vraisemblables a priori. Ceci conduit au décrochage du filtre, lors de l'avènement des événements correspondants.

La faible concentration des particules dans les différentes régions d'état élémentaires (courbe en rouge fig. I.3.3 (d)), pratiquement constante tout au long du traitement, témoigne d'un meilleur remplissage de l'espace d'incertitude a posteriori. Ceci optimise l'approximation de la densité de probabilité conditionnelle, notamment pour les queues de distribution, permettant aux filtres une intégration cohérente plus longue d'événements a priori peu vraisemblable.

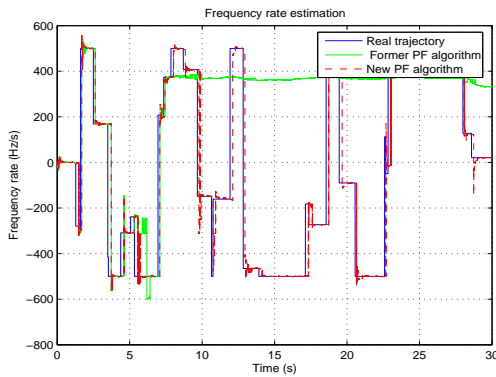
Notons, enfin, que les pics, observés dans l'estimation des paramètres d'état (figures I.3.3 (a), (b) et (c)) , sont dûs aux délais naturels d'acquisition des valeurs des sauts, notamment sous faible rapport Signal/Bruit.



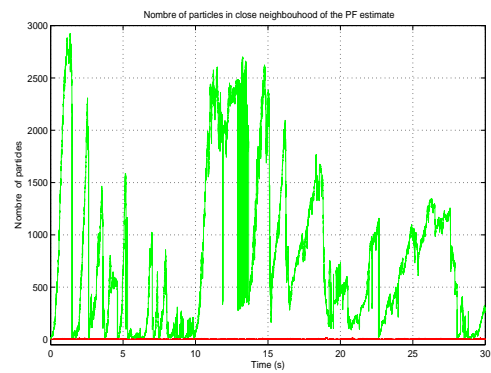
(a) Erreur d'estimation de la phase



(b) Estimation de la fréquence



(c) Estimation du taux de variation de la fréquence



(d) Redondance particulaire autour de la gaussienne la plus massive

FIG. I.3.3 – Amélioration de la stabilité du filtre particulaire et réduction du nombre de particules par l'exclusion mutuelle ( $RSB = -10\text{ dB}$ ).

## 5 Poursuite conjointe de la phase et de la distance en traitement radiale du signal radar

L'exemple de verrouillage de phase, illustré ci-dessus, correspond à la poursuite de phase Doppler dans les problèmes de réception des signaux pour des radars de poursuite, et autres problèmes génériques comme le GPS, les Télécommunications.

Pour illustrer les performances de différentes versions du filtre à particules déterministes de Gauss, cette section présente les performances du filtre pour les trois critères d'estimation :

- Maximum de vraisemblance trajectorielle,
- Maximum de vraisemblance marginale,
- Minimum de variance.

pour le problème de réception de mesures radiales en radar de poursuite.

Pour le cas d'une cible radiale<sup>3</sup>, le modèle d'état est donné par<sup>4</sup> :

$$\begin{cases} \begin{cases} \rho_{k+1} = \rho_k + \delta\rho_k \\ \gamma_{k+1} = \gamma_k + \Pi_k \delta\gamma_k \\ v_{k+1} = (1 - \alpha T)v_k + \gamma_k T \\ \phi_{k+1} = \phi_k + \frac{4\pi}{\lambda_n} v_k T + \delta\phi_k \\ D_{k+1} = D_k + v_k T \end{cases} \\ y_i^n = \rho_k \exp(j\phi_k) \frac{K}{R_k^2} h(iT_c - \frac{2R_k}{c}) + \nu_i \end{cases}$$

où :

- $\rho$  et  $\phi$  désignent respectivement l'amplitude et la phase du signal reçu,
- $D$  Distance radar-cible,
- $v = \frac{dD}{dt}$  vitesse radiale de la cible,
- $\gamma \sim \frac{d^2D}{dt^2}$  consigne d'accélération radiale de la cible,
- $\alpha$  coefficient de viscosité,
- $\Pi_k \delta\gamma_k$  saut poissonien à valeur gaussienne tronquée de la consigne d'accélération,
- $\delta\phi_k$  et  $\delta\rho_k$  bruits blancs gaussiens, respectifs de phase et d'amplitude,
- $(y_i^n)$  vecteur de mesure à la recurence  $n$ , l'indice  $i$  désigne le numéro de l'échantillon de mesure considéré,
- $T_c$  la durée de l'impulsion (égale à la période d'échantillonnage des mesures),
- $\lambda_n$  longueur d'onde de la porteuse,
- $h(.)$  fonction d'autocorrélation normalisée de l'impulsion rectangulaire donnée par :

$$h(\mu) = \begin{cases} 1 - \frac{|\mu|}{T_c} & \text{si } -T_c \leq \mu \leq T_c \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les filtres particuliers déterministes ont été appliqués, pour les valeurs expérimentales suivantes :

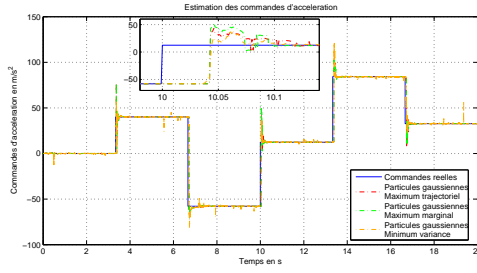
- Rapport S/B :  $[0, 5]$  dB,
- $T$  : 1 ms,
- $T_c$  : 1  $\mu$ s,
- Incertitude initiale de distance : 150 m,
- Incertitude initiale de vitesse :  $\sim 8$  m/s,
- Plage des commandes d'accélération :  $[-100, 100]$  m/s<sup>2</sup>,
- Vitesse de la cible :  $[-1000, 1000]$  m/s, (coefficient de viscosité :  $\alpha = 0.1$ )
- $\lambda_{\Pi} = 1$  Hz,
- $\sigma_{\delta\gamma} = 10^4$ ,

*Paramètres des filtres à particules Gaussiennes :*

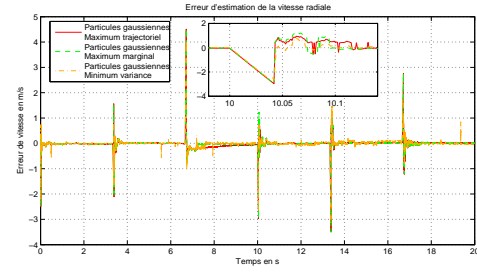
- $N = 32$ ,
- $M_{\Pi\delta\gamma} = 9$ ,
- Intermittence des Branchement/Sélection :  $T_{BS} = 4$  itérations,
- Seuil de recouvrement : 1/3.

<sup>3</sup>Mouvement rectiligne selon l'axe de visée du Radar

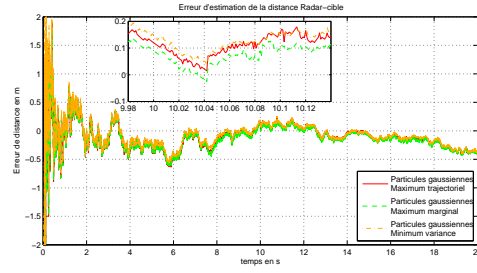
<sup>4</sup>cf Partie II pour une étude détaillée de l'application radar



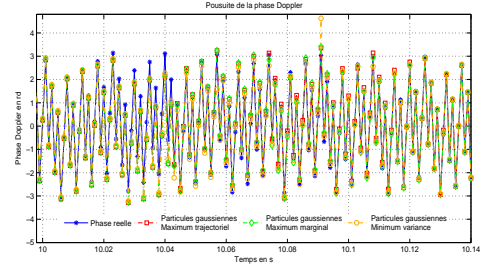
(a) Estimation des commandes d'accélération



(b) Erreur d'estimation de la vitesse



(c) Erreur d'estimation de la distance



(d) Poursuite de la phase Doppler après un saut d'accélération

FIG. I.3.4 – Performances de différentes versions du filtre particulaire déterministes dans le traitement des mesures radiales d'un radar de poursuite ( $RSB \in [0, 5 \text{ dB}]$ ).

## 6 Conclusion

La technique particulière illustrée à travers les applications citées ci-dessus permet d'apporter une solution "optimale" au problème de filtrage non-linéaire avec un nombre relativement réduit de particules : quelques centaines/dizaines en fonction du RSB.

Une telle réduction de la complexité est inatteignable par les techniques particulières aléatoires. En effet, une représentation efficace des flots dynamiques du système (Saut poissonnien de fréquence 1/1000) susceptible de permettre la poursuite des variations des paramètres d'état nécessiterait quelques milliers de particules<sup>5</sup>. Cette économie cruciale pour les applications temps-réel, objet d'études contractuelles, est illustrée plus loin à travers l'application Radar sur données réelles comparée à la campagne aléatoire [Noyer 96]. Elle est due à l'optimisation des discrétisations du bruit de dynamique offerte par l'exploration déterministe.

<sup>5</sup>Contrairement à l'intuition, le coût du tirage aléatoire même pour des particules de Dirac n'est pas négligeable. Ainsi, malgré le coût des inversions matricielles dans les FKE locaux et l'exclusion mutuelle, le gain en temps de calcul apporté par la réduction du nombre de particule reste conséquent. Observé à travers la comparaison à performances quasi-égales des temps d'exécution du filtre à particules aléatoires et celui à particules déterministes, ce gain en temps de calcul étend par l'expérience les résultats développés dans [Karlsson 04] concernant la comparaison de la complexité algorithmique entre les particules gaussiennes et les particules de Dirac dans le cas aléatoire.



## Chapitre 4

# Conclusion de la première partie

La présentation cohérente des principales techniques de résolution numérique du problème de filtrage non-linéaire a permis de dresser un état de l'art comparatif de ces méthodes et de montrer, d'une part, l'innovation apportée par le filtre à particules déterministes proposé, notamment par rapport à son prédécesseur aléatoire, et d'autre part, les gains de performances que laissent escompter ses spécificités.

En effet, basé sur une ré-interprétation déterministe du principe particulaire et doté d'instruments d'optimisation du maillage de l'espace d'état adaptés à l'objectif de l'estimation (critère), le filtre à particule déterministe garantit une gestion efficace des ressources de calcul disponibles. Les gains de performances, d'ores et déjà illustrés dans ce qui précède, seront plus amplement investigués dans la suite à travers deux applications d'intérêt majeur : Traitement des signaux Radar et GPS.



## Deuxième partie

# Récepteur particulière pour radar de veille/poursuite





# Chapitre 1

## Introduction

Le **traitement optimal des signaux radar**, notamment en présence de :

- cible fortement manœuvrante,
- faible rapport signal/bruit,

nécessite une approche globale du problème non-linéaire que pose l'extraction de l'information.

Or, habituellement, ce problème est résolu par un découpage arbitraire des parties détections et poursuites :

- La cible est d'abord détectée par intégration d'un certain nombre de recurrences, lorsque le signal cumulé dépasse un certain seuil.
- Ensuite, la cible étant détectée, les informations délivrées par l'extracteur servent à initialiser un filtre local prenant en compte la dynamique de la cible permettant d'estimer sa trajectoire.

Peu de méthodes se sont intéressées au problème de détection/poursuite dans son ensemble.

Souvent, les améliorations proposées pour le traitement des informations radar ne concerne que le pistage de cible à partir des données prétraitées. Il est clair que de tels procédés sont loin d'être optimaux, et que l'amélioration significative des performances des systèmes radar nécessite le développement de récepteurs non-linéaires optimaux capable de prendre en compte une **modélisation complète du problème** (Chapitre 2).

La technique particulière à branchement aléatoire, proposée dès 1989, a permis de mettre en évidence les bénéfices de la résolution optimale du problème de réception des signaux radar dès 1996. Les résultats présentés dans [Noyer 96] montrent l'important gain de performance que permet cette approche, mais au prix d'un coût calculatoire peu accessible en temps réel.

Les récentes améliorations de l'algorithme particulière :

- utilisation des **particules** aléatoires **gaussiennes** [Teuliere 00],
- introduction de l'**exploration déterministe** pour les variables d'état discrètes [Bensalem 02],

ont permis à performances égales une grande économie de calcul par rapport aux versions précédentes. Cette économie est d'autant plus cruciale pour l'application radar que les exigences temps-réel y sont une nécessité.

Il s'agit dans cette partie de montrer l'efficacité du **filtre à particules déterministes de Gauss**, adapté au cas de variables d'état continues,

- tant au niveau des **gains de performances** par rapport aux techniques classiques,
- qu'en terme d'**économie de calcul** par rapport à la version aléatoire,

pour deux types de missions radar : **la veille** (Chapitre 5) et **la poursuite** (Chapitres 3 et 4).



## Chapitre 2

# Problématique radar : Introduction et modélisation

### 1 Introduction

Le R.A.D.A.R. (Radio Detection And Ranging) est un moyen de détection de cible et d'estimation de leurs positions basé sur l'émission/réception d'ondes électromagnétiques. Pendant sa propagation et sa réflexion le signal radar subit des transformations dépendant des caractéristiques électromagnétiques et cinématiques de la cible. La réception du signal ainsi transformé permet de reconstruire ces caractéristiques.

Le traitement optimal du signal Radar nécessite la modélisation précise du signal reçu et de la dynamique régissant l'évolution de ses paramètres. Ceci suppose une prise en compte rigoureuse des éléments constitutifs des chaînes d'émission et d'acquisition du Radar et des équations de mesure qui en découlent. Aussi, le suivi des évolutions des caractéristiques des cibles détectées, notamment pour les radars de poursuite, nécessite une modélisation aussi fidèle que possible de la dynamique de ces caractéristiques et de leurs aléas, dont la finesse conditionne la précision de l'estimation.

Ce chapitre retrace l'évolution du signal depuis son émission jusqu'à l'entrée de l'estimateur de ses paramètres d'état. Il présente ensuite le modèle d'état retenu pour la présente étude. Il rappelle, enfin, les principes des techniques classiques de réception du signal Radar, ainsi que les principales solutions particulières déjà proposées.

### 2 Principes des systèmes radar

Le radar est un ensemble comportant un émetteur, une antenne, un récepteur et un système d'exploitation.

Le signal émis est une suite d'impulsions électromagnétiques, chaque impulsion se propageant dans l'atmosphère à la vitesse de la lumière. Une partie de ce signal est réfléchié par la cible sous forme d'une onde de faible amplitude et de nature similaire à celle du signal émis. La mesure de la distance s'effectue par l'intermédiaire de celle du temps de trajet aller-retour de l'onde entre le radar et la cible. En présence d'une cible à la distance  $D$ , le radar reçoit une onde réfléchié avec un retard :

$$T = \frac{2D}{c}$$

où  $c$  désigne la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique.

La mesure de la distance étant insuffisante pour une localisation tri-dimensionnelle de la cible, elle est combinée avec une mesure angulaire utilisant la directivité des antennes concentrée dans un angle limité  $\theta$ , appelé ouverture du diagramme d'antenne.

Les radars se différencient entre eux par leurs missions dont dépend leur manière d'explorer l'espace à l'aide de leur antenne.

## 2-1 Radar de Veille

Leur rôle principal est de détecter la présence de cible dans un large domaine de l'espace. Ils assurent une exploration totale de l'espace par un déplacement régulier de leurs faisceaux. Ce déplacement peut être réalisé, par rotation de l'antenne radar, par balayage électronique du faisceau, ou par une combinaison de ces deux procédés.

## 2-2 Radar de Poursuite

Un radar de poursuite permet de mesurer de façon suffisamment régulière les coordonnées d'une cible pour déterminer sa trajectoire et au besoin prédire sa position future. Tous les systèmes radars peuvent être considérés comme des radars de poursuite s'ils sont dotés d'un post-traitement des informations délivrées permettant d'établir des pistes des cibles détectées. Cependant, le nom de radars de poursuite désigne, généralement, les radars qui peuvent effectuer cette opération de pistage en temps-réel avec une périodicité et une précision suffisantes. Les radars de poursuite utilisent des procédés de mesure particuliers, tant pour la mesure de la distance que pour les mesures angulaires, permettant d'affiner la précision de localisation.

On distingue deux catégories de radars de poursuite :

- Les radars de poursuite continue, mesurant sans interruption les coordonnées d'une cible, par verouillage asservi du faisceau d'antenne sur sa position angulaire.
- Les radars de poursuite discontinue (Track-while-Scan) dont les propriétés permettent de poursuivre simultanément plusieurs cibles situées dans divers secteurs angulaires. Les différentes pistes sont obtenues séquentiellement sous forme de suites discontinues de fractions de trajectoires.

# 3 Signal Radar

## 3-1 Signal Radar à l'émission

Le signal émis par le radar est dans notre cas à faible largeur de bande, et s'écrit sous la forme :

$$s(t) = u(t)\exp(j\omega_0 t)$$

où

$u(t)$  est l'enveloppe complexe du signal émis de durée  $T_i$ ,  
et  $\omega_0 = 2\pi f_0$  est la pulsation de la porteuse.

### 3-1-1 Impulsion rectangulaire

L'enveloppe la plus simple utilisée en radar est l'impulsion rectangulaire de durée  $T_i$ , donnée par :

$$u(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq t \leq T_i \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

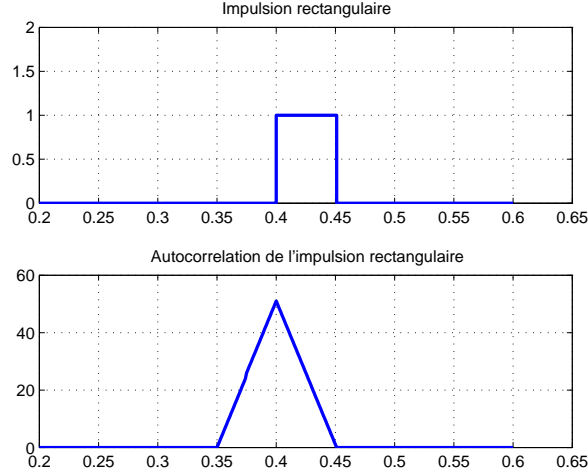


FIG. II.2.1 – Impulsion rectangulaire

La résolution en distance : distance minimale entre deux objets pour garantir leur distinction à la réception, pour une telle impulsion est donnée par :

$$\Delta R = \frac{c}{2B}$$

où  $B$  est la bande du signal inversement proportionnelle à sa durée  $T_i$ .

L'utilisation d'impulsions très brèves pour affiner la résolution en distance se heurte à diverses limitations technologiques relatives à l'émission de puissances élevées.

### 3-1-2 Compression d'impulsion

La compression d'impulsion englobe l'ensemble des techniques qui utilisent la modulation en phase ou en fréquence de la porteuse pour augmenter la bande du signal sans pénaliser sa durée. La fonction d'autocorrélation du signal émis est de largeur inversement proportionnelle à la bande de ce signal. La précision sur la distance augmente donc avec la bande du signal. Elle est équivalente à celle d'une impulsion plus étroite sans modulation.

#### Modulation de fréquence linéaire

La modulation "chirp" consiste à moduler l'impulsion avec une fréquence qui varie linéairement pendant sa durée  $T_i$  :

$$u(t) = A \exp(j\pi\beta t^2) \text{ si } -T_i/2 \leq t \leq T_i/2$$

où  $\beta$  représente le rapport entre la largeur de bande  $\Delta f$  du signal et sa durée  $T_i$  à l'émission. Le signal radar s'écrit, dans ce cas :

$$s(t) = A \exp(j(2\pi f_0 t + \pi\beta t^2)) \text{ si } -T_i/2 \leq t \leq T_i/2$$

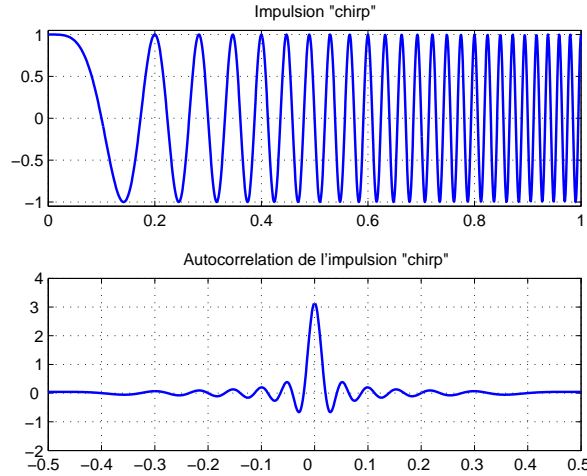


FIG. II.2.2 – Compression d'impulsion par modulation en fréquence

### 3-1-3 Train d'impulsions

En pratique, les radars émettent des impulsions répétitives à une certaine fréquence de répétition  $F_r$ . Le traitement conjoint de plusieurs impulsions permet d'améliorer l'estimation de l'effet Doppler, et donc de la vitesse radiale de la cible [Chevalier 89]. Il nécessite, cependant, une modélisation fine des variations de vitesse le long de l'intégration cohérente des impulsions successives, pour en compenser l'effet sur le signal reçu.

Par ailleurs, pour des vitesses radiales élevées (plusieurs tours de phase Doppler pendant  $T_r = 1/F_r$ ), le sous-échantillonnage de l'enveloppe Doppler à la fréquence  $F_r$  conduit à des vitesses ambiguës distantes de  $\frac{cF_r}{2f_0}$ . A court terme, cette ambiguïté fonction de la fréquence porteuse  $f_0$  et de la fréquence de répétition  $F_r$  peut être levée par changement de l'une ou l'autre de ces fréquences. A plus long terme, elle est levée par le lien entre le déplacement de l'enveloppe et la vitesse Doppler. Notons, enfin, que la période  $T_r$  d'une récurrence radar constitue une faible durée, elle modélise les variations rapides. Des paramètres à dynamique lente peuvent être supposés invariables pendant plusieurs récurrences.

### 3-1-4 Agilité de fréquence

L'agilité de fréquence [Chevalier 89] consiste en un codage à valeurs discrètes des fréquences qui modulent plusieurs impulsions. Une suite de récurrences successives modulées par la même porteuse est appelée rafale, elle présente une mesure plus longue du temps que la récurrence élémentaire. Une rafale correspond, donc, à des variations plus lentes des paramètres du signal radar.

Ce codage peut être accompagné par une modification de la fréquence de répétition  $F_r$  des impulsions élémentaires. Il permet, par les changements de l'une ou l'autre des fréquences, la levée des ambiguïtés vitesses. D'autre part, il est, aussi, utilisé en imagerie radar pour effectuer un échantillonnage en fréquence de la rétrodiffusion de la cible illuminée [Chamon 96].

### 3-2 Signal reçu à l'entrée de l'antenne

Durant sa transmission, le signal radar subit une atténuation d'espace libre et un retard dûs au trajet aller-retour de l'onde électromagnétique entre le radar et la cible.

De plus, la rétrodiffusion du signal sur la cible affecte les paramètres du signal radar. Chaque point de la cible renvoie un signal qui peut être modélisé à l'entrée de l'antenne par :

$$y(t) = \frac{K_0}{R_{\tau/2}^2} D(\theta_{\tau/2} - \theta_{\text{Radar}}) \sigma_s(t - \tau) + b_t \quad (2.1)$$

où  $R_{\tau/2}$  est la distance radiale du point considéré de la cible lors de la réflexion et  $\theta_{\tau/2}$  sa position angulaire.  $\tau$  est le temps du trajet aller-retour de l'onde,  $t$  l'instant de sa réception et  $\theta_{\text{Radar}}$  l'axe de visée de l'antenne Radar.

Le signal global reçu à l'entrée de l'antenne radar :

$$y(t) = \int_S \frac{K_0}{R_{\tau_s/2}^2} D(\theta_{\tau_s/2} - \theta_{\text{Radar}}) \sigma_s(t - \tau_s) ds + b_t \quad (2.2)$$

est une somme des contributions des points de la surface  $S$  de la cible, visible par le radar.

#### Diagramme d'antenne

$D(\Delta\theta)$  est le diagramme d'antenne permettant le positionnement angulaire de la cible. Selon le mode d'extraction de l'information angulaire, on distingue :

- **antenne classique :**

L'équation de mesure 2.2 représente le signal d'antenne. Pour une antenne parabolique d'ouverture  $D$ , recevant une onde plane de longueur d'onde  $\lambda$  provenant d'un émetteur de site  $\theta$  et de gisement  $\psi$ , le gain maximal en puissance est donné par [Darricau 93] :

$$G_0 = \left( \frac{\pi D}{\lambda} \right)^2$$

et le diagramme en amplitude d'antenne pour une illumination uniforme est [Darricau 93] :

$$D(\theta, \psi) = \frac{J_1(u)}{u} \frac{J_1(v)}{v}$$

avec,  $u = \frac{\pi D}{\lambda} \sin(\theta)$ ,  $v = \frac{\pi D}{\lambda} \sin(\psi)$  et  $J_1$  la fonction de Bessel d'ordre 1.

Notons qu'une approximation simplificatrice de ce diagramme peut être obtenue sous l'hypothèse de lobe gaussien [Darricau 93],

$$D(\theta, \psi) = \exp(-q_1 \theta) \exp(-q_2 \psi)$$

- **technique monopulse :** (cf section 7)

L'équation de mesure 2.2 est vectorielle.  $D(\Delta\theta)$  est le vecteur de  $\mathbb{C}^4$  des diagrammes  $D^i$  de chaque cornet récepteur.

- **antenne réseau :**

Le vecteur de mesure et le diagramme d'antenne sont de dimension plus importante. Il y a autant de diagrammes élémentaires que d'éléments récepteurs sur l'antenne.



## 4 Chaîne d'acquisition

La figure 4 montre le schéma bloc d'un radar moderne [Chamon 96]. Ce schéma représente les chaînes d'émission et d'acquisition du radar.

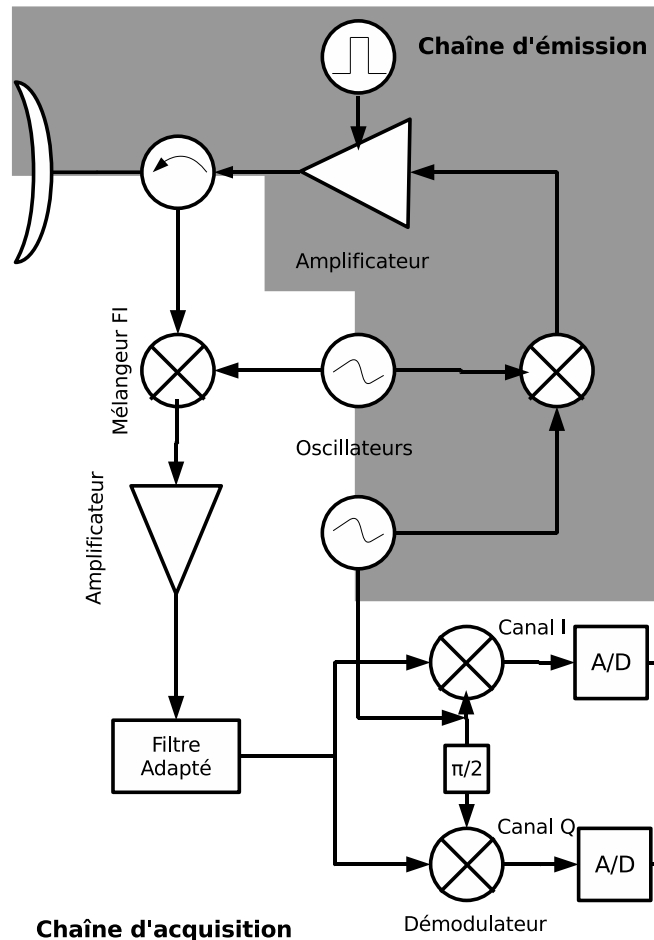


FIG. II.2.3 – Schéma bloc du radar

La chaîne d'acquisition comporte :

- un mélangeur qui effectue un décalage vers une fréquence intermédiaire du signal reçu,
- un amplificateur hyperfréquence, de bruit aussi faible que possible,
- un filtre adapté qui effectue la corrélation du signal reçu à une réplique du signal utile : c'est le traitement optimal du signal dans le bruit, pour une impulsion radar, c'est à dire à très court terme ( $\sim \mu s$ ),
- un démodulateur opérant le décalage vers zéro de la fréquence intermédiaire, et délivrant les deux composantes en quadrature du signal,

- un échantillonneur numérique de période d'échantillonnage égale à la durée d'une impulsion radar : garantie de la blancheur du bruit de mesure après échantillonnage.

Nous nous intéressons dans ce mémoire à l'analyse numérique du signal radar échantillonné à la sortie du filtre adapté.

## 5 Mesures échantillonnées à la réception

Pour des vitesses de cibles usuelles, on a  $\tau = \frac{2R_{\tau/2}}{c}$ , avec  $R_{\tau/2}$  la distance de la cible au radar à l'instant de réflexion du signal sur la cible, et  $c$  la vitesse de la lumière. Le signal radar reçu par l'antenne s'écrit donc [Chamon 96] :

$$y(t) = \frac{K_0}{R_{\tau/2}^2} D(\Delta\theta) \sigma u(t - \frac{2R_{\tau/2}}{c}) \exp(j\omega_0(t - \frac{2R_{\tau/2}}{c})) + b_t$$

Soit, après démodulation :

$$y(t) = \frac{K_0}{R_{\tau/2}^2} D(\Delta\theta) \sigma u(t - \frac{2R_{\tau/2}}{c}) \exp(j2\pi \frac{2R_{\tau/2}}{\lambda}) + b_t$$

avec  $\lambda = c/f_0$  longueur d'onde du signal. Le signal à la sortie du filtre adapté correspond à la corrélation du signal démodulé par une réplique du signal  $u(t)$  envoyé, et s'écrit :

$$\begin{aligned} y(\mu) &= \int y(t) u^*(\mu - t) dt \\ &= \frac{K_0}{R_{\tau/2}^2} D(\Delta\theta) \sigma h(\mu - \frac{2R_{\tau/2}}{c}) \exp(j2\pi \frac{2R_{\tau/2}}{\lambda}) + \nu_\mu \end{aligned} \quad (2.3)$$

où  $h(\mu - \frac{2R_{\tau/2}}{c}) = \int u(t - \frac{2R_{\tau/2}}{c}) u^*(\mu - t) dt$  est la corrélation de l'enveloppe complexe du signal reçu par la réplique de l'enveloppe émise. L'équation 2.3 est obtenue sous l'hypothèse de variations négligeables de l'atténuation  $1/R_{\tau/2}^2$  et de la phase Doppler  $2\pi \frac{2R_{\tau/2}}{\lambda}$  pendant la durée  $T_i$  de l'enveloppe.

Le signal radar est, ensuite, échantillonné à une fréquence  $1/T_i$  qui assure la blancheur du bruit de mesure :

$$y_k = \frac{K_0}{R_n^2} D(\Delta\theta) \sigma h(kT_i - \frac{2R_n}{c}) \exp(j2\pi \frac{2R_n}{\lambda}) + \nu_k \quad (2.4)$$

où  $R_n$  est la position radiale de la cible au moment de la réflexion lors de la  $n^{\text{ième}}$  récurrence radar. Les deux voies à la sortie du démodulateur : I et Q, voies en phase et celle en quadrature, correspondent respectivement à la partie réelle et imaginaire du signal complexe décrit par l'équation 2.4.

### Remarque 5.1

*Le retard  $\tau$  est fonction du temps. Sous l'hypothèse de mouvement rectiligne uniforme pendant le trajet de l'onde, le retard s'écrit :*

$$\tau(t) = \tau(0) + \frac{2v}{c}t$$

*où  $\tau(0)$  est le retard correspondant à la distance radiale cible-radar  $R(0)$  à l'émission et  $v$  vitesse radiale de la cible.*

*L'équation 2.4 s'écrit alors sous la forme*

$$y_k = \frac{K_0}{R_0^2} D(\Delta\theta) \sigma h(kT_i - \frac{2R_0}{c}) \exp(j2\pi f_D t_k) + \nu_k$$

faisant apparaître la fréquence Doppler  $f_D = \frac{2v}{\lambda}$ .

## 6 Autocorrélation de l'enveloppe du signal

Les sorties du filtre adapté selon l'impulsion radar utilisée sont données par :

### 6-1 Impulsion rectangulaire

La fonction d'autocorrélation d'une telle impulsion est (Figure II.2.1) :

$$h(\mu) = AT_i \left(1 - \frac{|\mu|}{T_i}\right) \text{ si } -T_i \leq \mu \leq T_i$$

### 6-2 Impulsion chirp

Dans le cas d'une impulsion comprimée par modulation linéaire de fréquence, la fonction d'autocorrélation s'écrit [Cook 93] (Figure II.2.2) :

$$h(\mu) = G_{CI} \frac{\sin(\pi\beta\mu(T_i - |\mu|))}{\beta\mu} \text{ si } -T_i \leq \mu \leq T_i$$

où  $G_{CI}$  est le gain de compression.

## 7 Mesures angulaires pour les radars de poursuite

La localisation angulaire donnée par la simple directivité du faisceau de l'antenne qui illumine la cible est grossière. On utilise des techniques plus sophistiquées dites écartométriques pour affiner l'estimation angulaire, à l'intérieur du diagramme d'antenne.

La "monopulse" (de phase ou d'amplitude), qui doit son nom à sa validité sur une seule impulsion radar, est celle adoptée dans tous les radars modernes. Elle est basée sur la comparaison des signaux délivrés par deux récepteurs élémentaires. Leurs différences servent à l'estimation angulaire.

### 7-1 Monopulse de phase

Cette technique consiste à disposer deux antennes identiques, pointées dans la même direction mais décalées sur l'axe Ox de  $d$  (figure II.2.4), [Chevalier 89].

Sous l'hypothèse de cible suffisamment éloignée du radar, telle que l'on puisse considérer plane l'onde reçue par les deux antennes (condition de Fraunhofer :  $d^2/(\lambda R_n) \ll 1$ ), et si  $D(\Delta\theta)$  est le diagramme des deux antennes, les signaux reçus sont identiques, à un déphasage près :

$$\Delta\Phi = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\Delta\theta_n)$$

et les signaux échantillonnés à la sortie du filtre adapté sont donnés par [Chamon 96] :

$$\begin{aligned} s_{0k} &= \frac{K_0}{R_n^2} D(\Delta\theta_n) \exp(j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\Delta\theta_n)) \sigma h(kT_i - \frac{2R_n}{c}) \exp(j2\pi \frac{2R_n}{\lambda}) + \nu_{0k} \\ s_{1k} &= \frac{K_0}{R_n^2} D(\Delta\theta_n) \exp(-j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\Delta\theta_n)) \sigma h(kT_i - \frac{2R_n}{c}) \exp(j2\pi \frac{2R_n}{\lambda}) + \nu_{1k} \end{aligned}$$

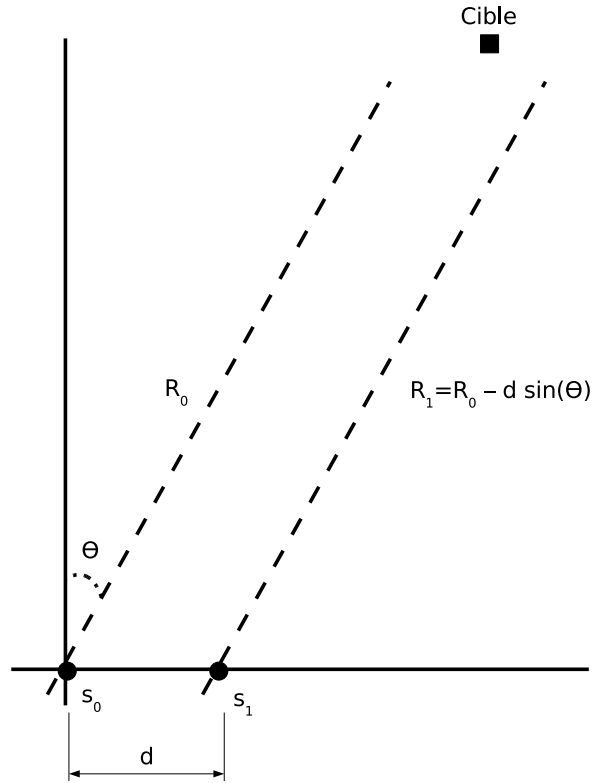


FIG. II.2.4 – Monopulse de phase simplifié

le vecteur  $D(\Delta\theta_n) \begin{pmatrix} \exp(j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\Delta\theta_n)) \\ \exp(-j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\Delta\theta_n)) \end{pmatrix}$  correspond au digramme global de l'antenne monopulse.

Il est possible de synthétiser les voies sommes et différences, utilisées en écartométrie radar pour la poursuite de la mesure angulaire, à partir des voies  $s_0, s_1$  en posant [Chevalier 89] :

$$\begin{aligned} \Sigma_k &= \frac{1}{2}(s_{0k} + s_{1k}) \\ \Delta_k &= \frac{1}{2}j(s_{0k} - s_{1k}) \end{aligned}$$

L'extension au cas de poursuite site-gisement en trois dimension est obtenue par une antenne réseau à quatre récepteurs, et la formation d'une voie somme et de deux voies différence : différence en site et différence en gisement.

## 7-2 Monopulse d'amplitude

Cette technique consiste à utiliser deux antennes identiques, de diagramme  $D(\Delta\theta)$  orientées dans deux directions voisines différant d'un angle  $\theta_a$  [Chevalier 89]. L'information angulaire est cette fois-ci extraite de la différence d'amplitude des signaux des deux antennes élémentaires. En effet,

$$\begin{aligned} s_{1k} &= \frac{K_0}{R_n^2} D_1(\Delta\theta_n) \sigma h(kT_i - \frac{2R_n}{c}) \exp(j2\pi \frac{2R_n}{\lambda}) + \nu_{1k} \\ s_{2k} &= \frac{K_0}{R_n^2} D_2(\Delta\theta_n) \sigma h(kT_i - \frac{2R_n}{c}) \exp(j2\pi \frac{2R_n}{\lambda}) + \nu_{2k} \end{aligned}$$

où  $D_1(\Delta\theta_n)$  et  $D_2(\Delta\theta_n)$  sont les diagrammes des deux antennes élémentaires données respectivement par  $D(\Delta\theta_n - \theta_a/2)$  et  $D(\Delta\theta_n + \theta_a/2)$  [Darricau 93].

Les voies sommes et différences sont obtenues à partir des signaux  $s_1$  et  $s_2$  par :

$$\begin{aligned} \Sigma_k &= s_{1k} + s_{2k} \\ \Delta_k &= s_{1k} - s_{2k} \end{aligned}$$

De même, la poursuite site-gisement est obtenue par quatre cornets récepteurs orientés selon des directions voisines en site et en gisement. Les signaux reçus sur chacun de ces cornets permettent la formation des voies somme, différence site et différence gisement.

### Remarque 7.1

*Les deux types de monopulse sont équivalents par l'intermédiaire des relations reliant les signaux reçus sur les antennes élémentaires, aux voies somme et différence [Chevalier 89].*

## 8 Bilan de puissance

Le bilan de puissance, sur un trajet émetteur-cible-récepteur, est obtenu en élevant au carré la norme du signal radar :

$$S/B = \frac{P_e G_e G_r G_{CI} \|\sigma\|^2}{R^4 B}$$

où :

- $P_e$ ,  $G_e$ ,  $G_r$  et  $G_{CI}$  sont respectivement la puissance émise, le gain à l'émission, le gain à la réception et le gain de compression d'impulsion : caractéristiques du radar,
- $R$  et  $\|\sigma\|^2$  distance et SER de la cible,
- $B$  puissance du bruit de mesure.

Il peut être réécrit, sous la forme :

$$S/B = \frac{PG}{B} \frac{\|\sigma\|^2}{R^4}$$

Pour la simulation des mesures radar, les caractéristiques du radar  $PG$  dans le bilan de puissance et la puissance  $B$  du bruit de mesures sont choisies pour obtenir les rapports  $S/B$  souhaités par impulsion pour les plages de distances et de SER visées par la simulation.

Il convient ici de souligner que le rapport élémentaire  $S/B$  par impulsion, peut être considérablement relevé en intégrant de manière cohérente les nombreuses récurrences radar. En présence d'une cible mobile et aléatoire, c'est tout l'objet du filtrage non-linéaire, notamment dans ce mémoire, que d'atteindre les limites intrinsèques permises par les équations optimales malgré les aléas du processus cible. C'est pourquoi la modélisation a priori de ces aléas possibles (cinématiques, électromagnétiques) est essentielle pour la classe d'applications considérée.

## 9 Modélisation du problème

### 9-1 Modèle électromagnétique de la cible

Dans ce modèle, la réponse de la cible au signal envoyé par le radar est réduite à son effet moyen sur l'impulsion radar. Cet effet est représenté par le coefficient de rétrodiffusion complexe  $\sigma$  décrivant les changements d'amplitude et de phase du signal émis. La valeur  $||\sigma||^2$  est appelé *Surface Equivalente Radar* (SER) de la cible, elle représente une mesure de la puissance réfléchie dans une direction donnée par la cible illuminée par une onde plane incidente suivant une direction donnée, et est définie par [Chevalier 89] :

$$SER = \lim_{r \rightarrow +\infty} 4\pi r^2 \frac{|E^{ref}|^2}{|E^{inc}|^2}$$

La SER varie selon l'angle de présentation radar/cible et la fréquence porteuse de l'onde radar. Ses fluctuations sont modélisées différemment selon les hypothèses faites sur le mode radar.

Les modèles à un point brillant dominant sont valables pour des cibles de faibles dimensions par rapport à la longueur d'onde du signal radar.

#### 9-1-1 Modèles de Swerling

Les modèles proposés par Swerling [Hardange 95] sont souvent employés, ils sont basés sur la représentation de la SER par un processus aléatoire de dynamique nulle, lente ou rapide selon la fluctuation de la SER, et de variables indépendantes de même densité de probabilité :

**Swerling 0** C'est le cas d'une cible non-fluctuante. La SER est alors constante, et modélisée comme un paramètre aléatoire dont le radar ne voit qu'une seule réalisation.

**Swerling 1** Les échos reçus par le radar sont considérés d'amplitudes constantes pendant le temps d'illumination de la cible mais indépendantes d'un tour d'antenne à l'autre (fluctuation lente). La densité de probabilité marginale est exponentielle :

$$p(||\sigma||^2) = \frac{1}{\overline{||\sigma||^2}} \exp\left(-\frac{||\sigma||^2}{\overline{||\sigma||^2}}\right)$$

où  $\overline{||\sigma||^2}$  est la SER moyenne de la cible.

**Swerling 2** La SER varie selon la même densité de probabilité que le Swerling 1 mais les fluctuations sont plus rapides. les échos de deux rafales successives sont indépendants.

**Swerling 3** Les fluctuations de la SER sont lentes, avec une loi de probabilité Rayleigh,

$$p(||\sigma||^2) = \frac{4||\sigma||^2}{\overline{||\sigma||^2}^2} \exp\left(-\frac{2||\sigma||^2}{\overline{||\sigma||^2}}\right)$$

**Swerling 4** Il s'agit d'une cible à fluctuation rapide avec une densité de probabilité de Rayleigh.

Dans tous les cas cités ci-dessus, la phase du coefficient de rétrodiffusion de la cible peut être modélisée par un processus aléatoire uniformément distribué sur  $[0, 2\pi]$ , à réalisations indépendantes de rafale à rafale.

### 9-1-2 Modèle à processus gaussien

Un autre modèle aléatoire fréquemment adopté consiste à supposer que le coefficient de rétrodiffusion est, en fonction de l'angle d'observation, un processus aléatoire gaussien complexe, localement stationnaire, à moyenne nulle [Chevalier 89]. Le caractère gaussien est justifié par le théorème de central-limite. Un tel processus est caractérisé par son spectre de puissance pour un petit secteur angulaire d'observation.

L'équation de mesure du radar étant conditionnellement linéaire en  $\sigma$ , coefficient de rétrodiffusion, le modèle aléatoire gaussien permet l'estimation de ce paramètre par un filtre de Kalman conditionnel aux autres paramètres [Noyer 96].

### 9-2 Modèle dynamique de la cible

Le déplacement de la cible peut être assimilé au mouvement de son centre de gravité. Le modèle général de mécanique de vol utilise un système non-linéaire à neuf ou à douze équations pour décrire le mouvement à trois dimensions de la cible [Bennis 86]. Plusieurs approximations, notamment linéaires ont été proposées dans la littérature. Nous présentons, ici, une variante du modèle de Singer [Noyer 96] qui suffira dans cette étude.

#### Modèle à processus poissonnien

La modélisation adoptée garde la simplicité du modèle linéaire découplé de Singer mais introduit, outre une non-linéarité sous forme de saturation sur la poussée, une non-gaussienneté sous forme d'un aléa de pilotage ponctuel poissonnien.

Dans ce modèle, les mouvements selon chaque axe sont indépendants, comme dans le modèle de Singer, et peuvent être représentés par le schéma de la figure II.2.5.

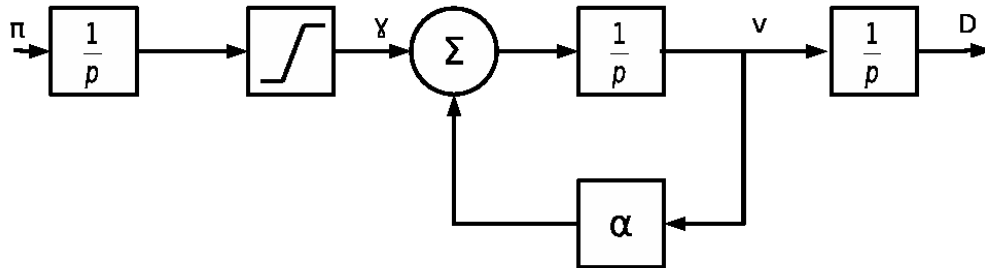


FIG. II.2.5 – Modèle de Singer modifié

Ce modèle introduit aussi une viscosité sur la vitesse permettant de rendre compte des limites de vitesse dans l'air. Les commandes de pilotage sont supposées indépendantes, et sont représentées par un processus poissonnien d'amplitude gaussienne  $\varepsilon_k w_k$  où,  $\varepsilon_k$  est la mesure binaire poissonnienne modélisant l'occurrence des changements des commandes d'accélération avec  $E(\varepsilon_k) = \nu_k$ , et  $w_k$  est un bruit borné de moyenne nulle et de variance  $\sigma$  représentant l'amplitude de ces sauts.

Ce modèle est plus réaliste que celui de Singer, dans la mesure où une cible réelle ne change pas constamment de consigne mais à des instants discrets imprévisibles. Le temps moyen de manœuvre est le taux moyen des sauts poissonniens. L'amplitude des consignes est aléatoire et bornée.

La représentation d'état pour ce modèle est donnée par :

$$x_{k+1} = \Phi(k+1|k)x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \varepsilon_k w_k$$

où la matrice de transition  $\Phi$  est donnée par :

$$\Phi(k+1|k) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha} & \frac{e^{-\alpha T}-1+\alpha T}{\alpha^2} \\ 0 & e^{-\alpha T} & \frac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elle peut être approchée par :

$$\Phi(k+1|k) = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 \\ 0 & 1-\alpha T & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pour un intervalle de discrétisation  $T$  petit.  $\alpha$ , coefficient de viscosité donné par  $\alpha = \frac{\gamma_{max}}{V_{max}}$ , conditionne la vitesse maximale de la cible selon un axe donné pour une accélération maximale donnée. Le radar délivre des observations en mesures polaires. Ces mesures polaires pour un système dynamique cartésien sont une source supplémentaire de non-linéarités. Pour des cibles éloignées, le mouvement peut être décomposé en un mouvement radial selon la direction de visée radar-cible et une faible rotation. Une telle considération permettrait de s'affranchir en filtrage du modèle cartésien, en faveur d'un modèle simplifié où les mesures radiales sont représentées par un modèle de Singer modifié unidimensionnelle, avec une modélisation simplifiée (processus aléatoire gaussien) des mesures angulaires.

### 9-3 Modèle d'observation

Pour chaque récurrence radar,

$$s_{m,k} = \frac{K}{R_{\tau/2}^2} D_m(\Delta\theta_{\tau/2}, \Delta\psi_{\tau/2}) \exp(j2\pi \frac{2R_{\tau/2}}{\lambda_n}) \\ h(k\Delta - \frac{2R_{\tau/2}}{c}) + \nu_{m,k}$$

où :

- $R_{\tau/2}$  distance radar-cible,
- $\Delta\theta_{\tau/2} = \theta_{\tau/2} - \theta_{Radar}$  et  $\Delta\psi_{\tau/2} = \psi_{\tau/2} - \psi_{Radar}$ , avec  $\theta_{Radar}$  et  $\psi_{Radar}$  représentent l'orientation angulaire de l'antenne radar,
- $D_m(.)$  diagramme normalisé de l'antenne  $m$  selon la technique de localisation angulaire (monopulse de phase ou d'amplitude),
- $h(.)$  autocorrélation normalisée de l'impulsion radar (impulsion rectangulaire ou chirp),
- $\lambda_n$  longueur d'onde de la porteuse à la récurrence  $n$  (constante en l'absence d'agilité de fréquence),
- $K$  terme d'amplitude.

## 10 Traitement du signal

### 10-1 Traitement classique

Le traitement classique du signal radar se compose de deux procédés : la détection de la présence d'une cible dans un volume élémentaire de l'espace, et l'estimation de la position de



la cible. En réalité, ces deux problèmes n'en forment qu'un seul. En effet, la détection s'effectue par détermination de la vraisemblance maximale de la position de la cible, elle même fournie par l'estimation optimale de cette position.

### 10-1-1 Détection/Estimation

La détection/estimation consiste à calculer la vraisemblance de la présence d'une cible dans différents points d'une grille de discrétisation, en distance, fréquence Doppler et position angulaire. La finesse de la grille conditionne la qualité de l'estimation mais aussi la complexité algorithmique. Les vraisemblances ainsi obtenues sont comparées à un seuil de détection. Chaque point de la grille de vraisemblance supérieure au seuil de détection représente une cible potentielle à la position correspondante.

Pour les radars de veille, la finesse de la grille utilisée correspond aux pouvoirs de discrimination du radar fonction de la largeur d'impulsion, de la période de répétition et des ouvertures en site et gisement du lobe de l'antenne radar. Cette grille est affinée en phase de poursuite pour une estimation plus précise des paramètres de la cible.

La vraisemblance de la présence d'une cible dans une position donnée  $\theta$  est obtenue par le détecteur quadratique normalisé [Chevalier 89], associé au filtre adapté par impulsion signalé précédemment.

$$\frac{|\int s(t)u(t, \theta)dt|^2}{\int |u(t, \theta)|^2 dt}$$

au moyen de la corrélation du signal reçu  $s(t)$  par la réplique  $u(t, \theta)$ .

L'intégration de la vraisemblance de la cible sur plusieurs récurrences permet de réhausser le rapport Signal/Bruit, et d'améliorer ainsi les performances de la détection quadratique tant que le paramètre considéré  $\theta$  reste constant. Cependant, l'hypothèse de stationnarité de la cible nécessaire à une telle intégration limite considérablement les performances notamment pour des cibles fortement manœuvrantes.

### 10-1-2 Post-traitement des mesures radar

Les mesures radar obtenues en phase de détection/estimation sont en général de faibles précisions à cause de l'insuffisante finesse de la grille utilisée et de la faible durée d'intégration temporelle. Dans les radars de poursuite on s'est longtemps attaché à restituer l'état réel de la cible avec plus de précisions, en retraitant ces résultats bruités.

Ce post-traitement des mesures consiste presque toujours en une optimisation locale par filtre de Kalman étendu dont les performances restent limitées au cas de faibles non-linéarités et de densités de probabilité proches de la loi normale.

### 10-1-3 Poursuite d'une cible

#### 10-1-3.1 Poursuite en distance

L'asservissement de la distance est basé sur la comparaison des puissances reçues sur des largeurs d'une demi case-distance de part et d'autre de la position présumée. Le signal reçu est, d'abord, découpé par une porte de sélection de durée approximativement égale à celle du signal utile  $T$ . Ceci permet de ne garder que les échos relatifs à la cible poursuivie. Deux voies sont, ensuite, formées par des portes de sélection d'une demi-durée du signal utile de part et d'autre de la position présumée. La comparaison des puissances reçues sur chacune de ces voies permet de calculer un signal d'erreur  $\epsilon$  proportionnel au décalage  $\delta D = \frac{1}{2} c \delta t$  de la position de la cible :

$$\epsilon \propto \frac{\delta t}{T}$$

Le calcul de moyenne du signal de commande  $\epsilon$  sur  $n$  récurrences permet de réduire l'écart-type de l'erreur sur la mesure de la distance d'un rapport  $\sqrt{n}$ .

Des boucles de poursuite comportant des fonctions complémentaires d'anticipation permettent de continuer une poursuite extrapolée de la cible, en cas de perte momentanée du signal utile.

### 10-1-3.2 Poursuite angulaire par monopulse

Pour les deux techniques monopulse citées, le dépointage angulaire  $\theta$  d'une cible par rapport à l'axe de l'antenne est proportionnel au rapport entre les voies différence et somme,

$$k \frac{\theta}{\theta_0} \simeq \left| \frac{\Delta}{\Sigma} \right|$$

Si  $\Delta \ll \Sigma$ , ce rapport peut être calculé par :

**Calcul direct** Il consiste à obtenir directement le quotient  $|\Delta/\Sigma|$  à partir du produit scalaire des voies somme et différence normées :

$$\left| \frac{\Delta}{\Sigma} \right| = \frac{\Delta \cdot \Sigma}{|\Sigma|^2}$$

**Traitement des amplitudes par amplificateur logarithmique** Utilisé en monopulse d'amplitude, il consiste à calculer l'écart à partir des voies  $s_1$  et  $s_2$  :

$$\left| \frac{\Delta}{\Sigma} \right| \simeq \frac{1}{2} \ln \left( \frac{s_1}{s_2} \right)$$

**Traitement en phase** Utilisé en monopulse de phase, il consiste à déterminer le déphasage entre les deux voies, soit par une mesure directe, soit par produit scalaire :

$$\left| \frac{\Delta}{\Sigma} \right| = \frac{1}{2} \frac{s_1}{|s_1|} \cdot \frac{js_2}{|s_2|}$$

## 10-2 Traitement par particules aléatoires

La résolution particulière fit l'objet de résultats applicatifs en défense durant 1991 et de rapports à la DGA dès janvier 1992 [Salut 92, Rigal 92a]. L'application Radar en post-traitement fut approfondie durant 1992 [Noyer 92] et prolongée en 1993 [Rigal 93]. Le procédé aléatoire fut breveté dès 1994 [Salut 94], en France et à l'étranger (Europe, U.S.A.).

A partir de 1993, divers auteurs publièrent indépendamment des idées voisines, [Gordon 93], [Kitagawa 93, Kitagawa 96].

La première application Radar complète (Doppler) sur données brutes fut, à notre connaissance, celle de [Noyer 96] qui s'étala de 1994 à 1996.

Le procédé aléatoire est encore utilisé :

- pour le post-traitement des données prétraitées [Gustafsson 02]
- pour le problème de détection [Boers 01], [Neyme 04]

Toutes ces solutions sont basées sur la techniques à particules aléatoires de Dirac, à l'exception de [Noyer 96] où la poursuite en données brutes est réalisée par des particules aléatoires de Dirac-Gauss.

## 11 Précision optimale des mesures radar

Les techniques classiques ne permettent pas la détection et la poursuite de cibles dans les cas extrêmes d'observabilité et de dynamique visées par les applications étudiées. Les performances de la technique particulière proposée ici ne peuvent, donc, pas être directement comparées aux leurs car il n'existe aucune référence applicative à de tels fonctions de charge et rapports S/B. Pour apprécier l'efficacité de la solution particulière, nous calculerons l'intégration cohérente longue nécessaire à une estimation locale idéale sous hypothèse de stationnarité pour obtenir les mêmes performances, hypothèse évidemment irréaliste sous forte dynamique.

Nous rappelons ci-dessous les écart-types d'erreur optimaux pour les mesures radiales. Ces performances optimales représentent les bornes de Cramer-Rao pour une estimation locale par moindre carré (cf [Noyer 96] pour détails et références).

### 11-1 Mesure de la distance

L'écart-type de l'erreur d'estimation du retard (temps aller-retour) dans le cas discret est donné par :

$$\sigma_\tau = \frac{T_i}{2\sqrt{RSB}}$$

Soit un écart-type d'erreur de distance de :

$$\sigma_R = \frac{c T_i}{4\sqrt{RSB}}$$

### 11-2 Mesure de la vitesse radiale

L'estimation de la vitesse radiale est obtenue à partir de celle de la fréquence Doppler dont l'écart-type de l'erreur est donné par :

$$\sigma_{f_D} = \frac{1}{T\sqrt{2RSB}}$$

où  $T = n T_r$  est la durée d'intégration cohérente.

Soit un écart-type d'erreur de vitesse de :

$$\sigma_v = \frac{\lambda}{2T\sqrt{2RSB}}$$

où  $\lambda$  désigne la longueur d'onde du signal radar émis.

## 12 Conclusion

La modélisation fine du problème radar exposée ci-dessus révèle des fortes non-linéarités excluant sa résolution efficace par des méthodes classiques de filtrage. Si le traitement classique du signal radar procède à une discrétisation de l'espace d'état permettant des approximations locales, son efficacité reste limitée aux cas favorables d'observabilité ( $\sim +10dB$ ) et de dynamique (cibles faiblement manœuvrantes). D'une part, le caractère non-adaptatif des grilles utilisées restreint ses capacités d'intégration cohérente et de prise en compte de fortes manœuvres. D'autre part, la séparation de l'estimation des variables d'état (mesures non-conjointes de distance, de phase et d'angle) ainsi que le recours à des estimateurs locaux sous-optimaux (asservissement non-stochastique par signal d'erreur) restent limités au cas favorable de fort rapport signal/bruit.

Les solutions particulières déjà proposées [Noyer 96], basées sur une exploration aléatoire de l'espace d'état, ont permis une résolution adaptative efficace (tenue d'accrochage et précisions) du problème dans les conditions critiques. Cependant ces méthodes restent inapplicables en pratique en raison du coût algorithmique ( $\sim 100000$  particules), dû à la lente convergence en  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  inhérente à l'aléatoire.

Ces exigences d'optimalité et de réalisabilité du problème radar ont motivé le développement d'une solution à particules déterministes optimisant le compromis entre la complexité algorithmique et l'efficacité de l'estimation. Les gains de performance apportés par cette méthode sont illustrés à travers les résultats obtenus en simulation et sur données réelles, et comparés à ceux obtenus par la campagne aléatoire.



## Chapitre 3

# Récepteur particulaire pour radar de poursuite - Résultats en simulation

### 1 Introduction

Ce chapitre présente la solution à particules déterministes de Gauss pour le problème de poursuite Radar sur données brutes. L'efficacité de la méthode particulaire et les gains de performances qu'elle apporte sont illustrés à travers des simulations numériques à forte dynamique et faible rapport signal/bruit. Les difficultés du problème radar sont abordées dans l'ordre croissant :

- Traitement radial des mesures radar pour une cible fortement manœuvrante en l'absence de fluctuations de phase/amplitude.
- Extension au cas de cibles scintillantes.
- Traitement tri-dimensionnel des mesures radar.

Les techniques classiques étant inopérantes sous les conditions critiques des expériences présentées, leur comparaison avec la technique particulaire se fait à travers le temps d'intégration cohérente nécessaire dans le cas idéal pour atteindre des performances comparables.

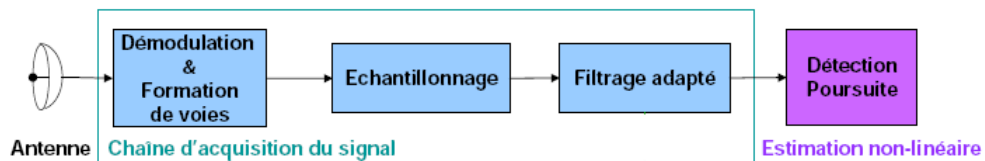


FIG. II.3.1 – Chaîne de traitement des données brutes à la sortie du filtre adapté

### 2 Traitement radiale de cible non-fluctuante

Nous considérons dans un premier temps la réception de mesures radar pour une trajectoire radiale d'une cible non-fluctuante ou à SER de fluctuations lentes (faibles dérives de l'amplitude et

de la phase du coefficient de rétrodiffusion).

## 2-1 Modèle d'état

Le modèle d'état du problème se réécrit sous la forme :

### 2-1-1 Équations de dynamique

$$\begin{cases} \gamma_{rk+1} = \gamma_{rk} + \varepsilon_{rk} g_{rk} \\ v_{rk+1} = (1 - \alpha\Delta)v_{rk} + \gamma_{rk}\Delta \\ R_{k+1} = R_k + v_{rk}\Delta \\ \rho_{k+1} = \rho_k + \delta\rho_k \\ \phi_{k+1} = \phi_k + \delta\phi_k \end{cases}$$

où l'indice  $r$  désigne l'axe Radar-Cible, et  $\rho$  et  $\phi$  désignent respectivement l'amplitude et la phase du coefficient de rétrodiffusion de la cible.

#### Remarque 2.1

L'équation d'évolution des paramètres cinématiques de la cible ci-haut est une approximation pour  $\Delta$  faible. La forme générale est donnée par :

$$\begin{cases} \gamma_{rk+1} = \gamma_{rk} + \varepsilon_{rk} g_{rk} \\ v_{rk+1} = e^{-\alpha\Delta} v_{rk} + \frac{1-e^{-\alpha\Delta}}{\alpha} \gamma_{rk} \\ R_{k+1} = R_k + \frac{1-e^{-\alpha\Delta}}{\alpha} v_{rk} + \frac{e^{-\alpha\Delta}-1+\alpha\Delta}{\alpha^2} \gamma_{rk} \end{cases}$$

qui s'écrit pour  $\alpha = 0$  sous la forme plus classique :

$$\begin{cases} \gamma_{rk+1} = \gamma_{rk} + \varepsilon_{rk} g_{rk} \\ v_{rk+1} = v_{rk} + \gamma_{rk}\Delta \\ R_{k+1} = R_k + v_{rk}\Delta + \frac{1}{2}\gamma_{rk}\Delta^2 \end{cases}$$

### 2-1-2 Équation de mesure

Pour chaque récurrence radar  $n$ ,

$$s_i^n = \rho_k \exp(j\phi_k) \frac{K}{R_k^2} \exp(j2\pi \frac{2R_k}{\lambda_n}) h(iT_c - \frac{2R_k}{c}) + \nu_i$$

où

- l'indice  $i$  désigne le numéro de l'échantillon de mesure considéré de la récurrence  $n$ ,
- $T_c$  la durée de l'impulsion comprimée (égale à la période d'échantillonnage)
- et  $\lambda_n$  longueur d'onde de la porteuse.

## 2-2 Linéarisation du modèle d'état

L'application de la technique à particules déterministes de *Gauss* nécessite la garantie de la validité des linéarisations locales du modèle durant tout le traitement, tant en régime transitoire qu'en régime permanent. Ceci est obtenu par une discrétisation suffisamment fine à particules gaussiennes de l'espace d'incertitude initiale (régime transitoire), ainsi que des domaines des bruits de dynamique (régime permanent).

Notons que :

- À l'intérieur d'une case distance, la corrélation de l'impulsion  $h(\cdot)$  peut être approchée linéairement en la distance  $R$ .
- Pour les distances ( $> 10km$ ) considérées, le terme d'atténuation  $\frac{1}{R^2}$  varie peu sur une case distance.
- Les exponentielles complexes sont approchées par segmentation linéaire sur des intervalles de largeur  $\frac{\pi}{2}$ .

En négligeant les termes d'incertitude croisés (second ordre) l'équation d'observation peut être approchée par des équations linéaires pour des incertitudes inférieures à une case distance en distance et à  $\frac{\pi}{4}$  en phase de rétrodiffusion et Doppler.

Notons également que la contrainte de linéarisation sur la phase absolue pour les fréquences de porteuse utilisées dans les applications Radar nécessiterait une très fine discrétisation de la distance compromettant, à l'évidence, une application réaliste de la technique particulière proposée.

Pour relaxer cette condition inutilement contraignante, nous considérons la phase en termes relatifs  $\Phi = \phi + 2\pi\frac{2R}{\lambda}$ , obtenue par le changement de variable d'état :

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\pi\frac{2}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

La périodicité des exponentielles complexes, permet alors une discrétisation de la phase globale sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ , limitant ainsi le nombre de particules mises en œuvre.

La validité des linéarisations en régime transitoire nécessite aussi la discrétisation des vitesse et accélération radiales qui ne sont pas directement observables dans l'équation de mesure mais qui sont corrélées à la distance et à la phase globale. Leurs pas de discrétisation sont dictés par le respect des contraintes de linéarisation en phase et distance. L'évolution des particules gaussiennes étant donnée par l'équation de Riccati, sa simulation a priori pour le régime de fonctionnement souhaité permet de fixer les pas de discrétisation de toutes les variables d'état, ainsi que le nombre de particules  $N_0$  nécessaire.

De même, les pas de discrétisation des bruits de dynamique, et donc le nombre  $M$  de discrétisation du bruit de dynamique, doivent garantir la validité de la linéarisation en régime permanent. Ils peuvent, aussi, être obtenus par simulation de l'équation de Riccati pour les conditions extrêmes d'accrochage du filtre souhaitées. Notons que pour le cas d'application considéré, le bruit dynamique des commandes d'accélération requiert une discrétisation fine.

## 2-3 Algorithme de filtrage

### – Initialisation :

Répartition équidistante des particules gaussiennes  $\{x_0^i\}_{i=1}^N$  sur l'espace d'incertitude initiale. Attribution d'une même variance a priori aux particules élémentaires,

$$P_0^i = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_l & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix} \quad (3.1)$$



Répartition des poids de particules selon la densité de probabilité a priori de l'état,

$$\rho_i = \frac{p_0(x_0^i)}{\sum_j p_0(x_0^j)} \quad (3.2)$$

– **Elimination d'Interpénétration(Sélection locale) :**

Pour chaque paire de particules  $(i, j)$ , s'il y a intersection de noyaux solides :

$$\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j \neq \emptyset \quad (3.3)$$

alors il faut éliminer la particule de plus faible poids  $\min(\rho_i, \rho_j)$ .

– **Exploration/Sélection globale :**

Pour chaque particule  $i$ , et chaque hypothèse  $w_{k+1} = w_j$  de la discrétisation du bruit de commande d'accélération :

Calcul du poids a priori de la trajectoire  $(i, j)$  :

$$\rho_{i,j} = \rho_i \rho_j^w \quad (3.4)$$

Sélection des  $N$  trajectoires particulières les plus massives.

– **Etape de prédiction :**

La prédiction de l'état particulaire  $x_{k|k-1}^i$  s'effectue par :

$$x_{k|k-1}^i = f_{k-1}(x_{k-1|k-1}^i, w_k^i) \quad (3.5)$$

La covariance de l'erreur de prédiction  $P_{k|k-1}^i$  s'obtient après linéarisation de l'équation de dynamique :

$$x_k = x_{k|k-1}^i + F_{k-1}^{x,i}(x_{k-1} - x_{k-1|k-1}^i) + F_{k-1}^{w,i}(w_k - w_k^i) \quad (3.6)$$

où  $F_{k-1}^{x,i}$  (respect.  $F_{k-1}^{w,i}$ ) désigne le jacobien de  $f$  par rapport à l'état  $x$  (respect. le bruit  $w$ ) calculé au point  $(x_{k-1|k-1}^i, w_k^i)$  (le long de la trajectoire particulaire), on obtient alors :

$$P_{k|k-1}^i = F_{k-1}^{x,i} P_{k-1}^i F_{k-1}^{x,i T} + F_{k-1}^{w,i} \sigma_i F_{k-1}^{w,i T} \quad (3.7)$$

– **Etape de correction :**

$x_{k|k}^i$  et  $P_k^i$  sont obtenus comme dans l'étape de correction de filtrage de Kalman étendu :

$$\begin{cases} x_{k|k}^i = x_{k|k-1}^i + K_k^i (y_k - h_k(x_{k|k-1}^i)) \\ K_k^i = P_{k|k-1}^i H_k^i T (H_k^i P_{k|k-1}^i H_k^i T + R_k)^{-1} \\ P_k^i = P_{k|k-1}^i - K_k^i H_k^i P_{k|k-1}^i \end{cases} \quad (3.8)$$

où  $H_k^i$  désigne le Jacobien de  $h$  par rapport à l'état  $x$  calculé en  $x_{k|k-1}^i$ .

– **Calcul des vraisemblances et mise à jour des poids :**

On calcule les  $N$  vraisemblances des séquences  $\{(X_k^i, w_{k+1}^i = w_j)_{i=1}^N\}$  par l'équation réursive :

$$V_{k+1}^i = V_k^i + V(y_{k+1}|x_k^i, w_{k+1}^i = w_j) + V(w_{k+1}^i = w_j) \quad (3.9)$$

Calcul des nouveaux poids normalisés,

$$\rho_{k+1}^i = \frac{\exp(V_{k+1}^i)}{\sum_l \exp(V_{k+1}^l)} \quad (3.10)$$

– **Estimation :**

L'estimateur à maximum de vraisemblance coïncide avec la séquence particulaire

$$(\hat{x}_0, \hat{W}_k) = (x_0^{i_{max}}, W_k^{i_{max}}) \text{ où } i_{max} = \arg \max_{i=1, \dots, N} V_k^i \quad (3.11)$$

## 2-4 Résultats numériques en simulation

### 2-4-1 Caractéristiques du Radar

- Fréquence d'émission : 500  $MHz$ ,
- Période de récurrence : 1000  $Hz$ ,
- Impulsion rectangulaire,
- Durée d'impulsion : 1  $\mu s$ .

### 2-4-2 Caractéristiques de la cible

- vitesse max : 1  $km/s \equiv$  fréquence Doppler de 3  $KHz$ ,
- accélération max : 0.1  $km/s^2$  ( $\sim 10 g$ ),
- fréquence moyenne de manœuvre (occurences poissonniennes) : 1  $Hz$ .

### 2-4-3 Scénario Simulé

Les figures (II.3.2, II.3.3) présentent les trajectoires d'état simulées des paramètres de la cible.

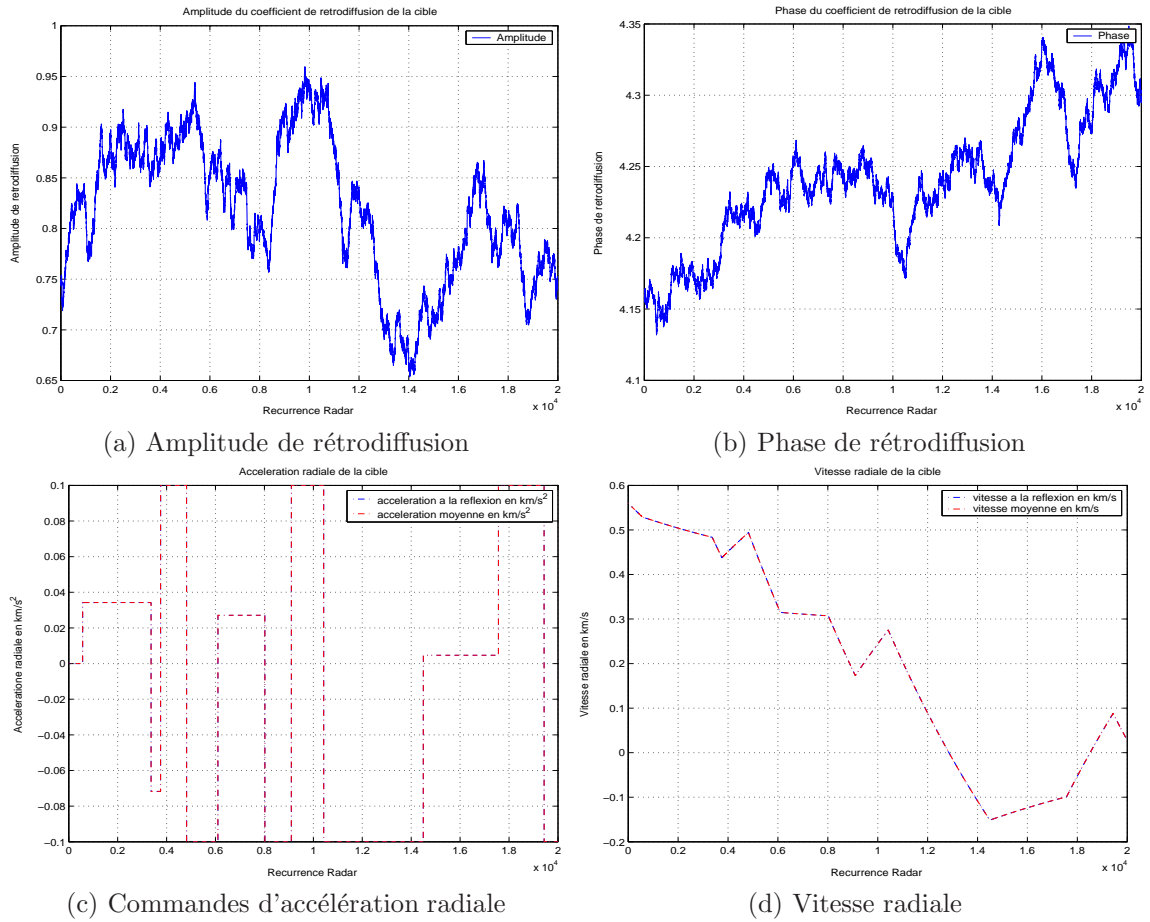
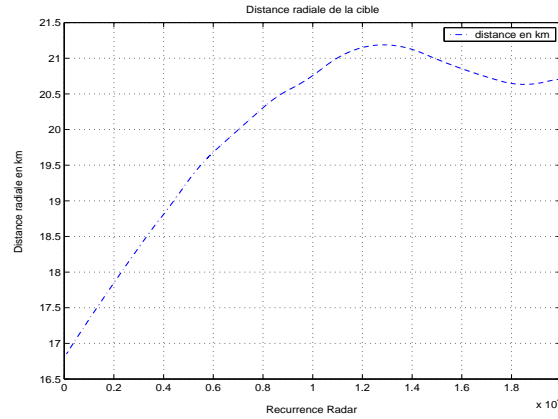


FIG. II.3.2 – Simulation des paramètres électromagnétiques et cinématiques de la cible (cas radial sans fluctuation)

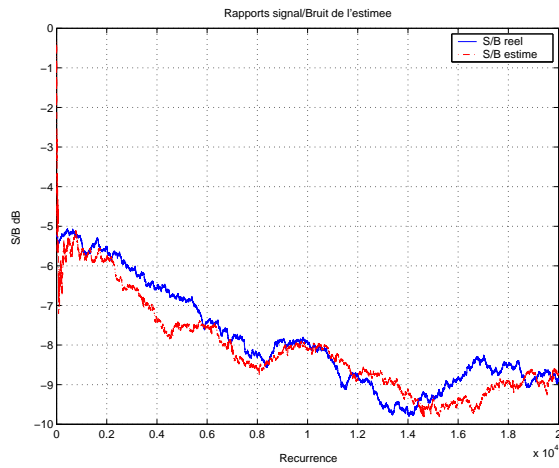


(e) Distance Radar-Cible

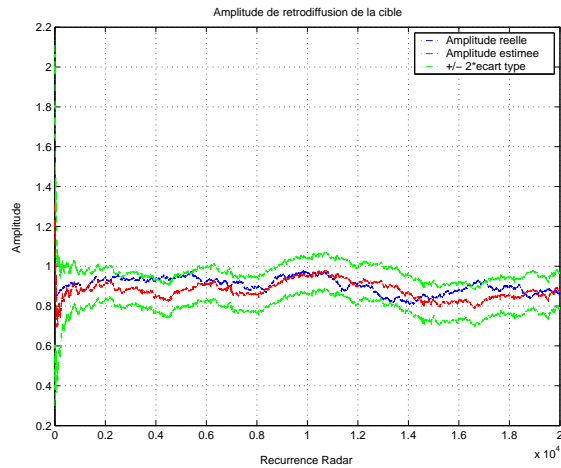
FIG. II.3.3 – Simulation des paramètres électromagnétiques et cinématiques de la cible (cas radial sans fluctuation)

#### 2-4-4 Performances du Filtre

- RSB :  $-5dB / -10dB$ ,
- Nombre de particules : 2000,
- Nombre de points de discrétisation des commandes : 100,
- Seuil de détection d'interpénétration :  $1/3$ ,
- Intermittence des branchement/Sélection : 10.
- Incertitude initiale de distance :  $150\text{ m}$ ,
- Incertitude initiale de vitesse :  $\sim 8\text{ m/s}$ .



(a) Rapport S/B



(b) Estimation : Amplitude de la SER

FIG. II.3.4 – Performances du filtre particulaire : Estimation des paramètres d'état d'une cible radiale non-fluctuante

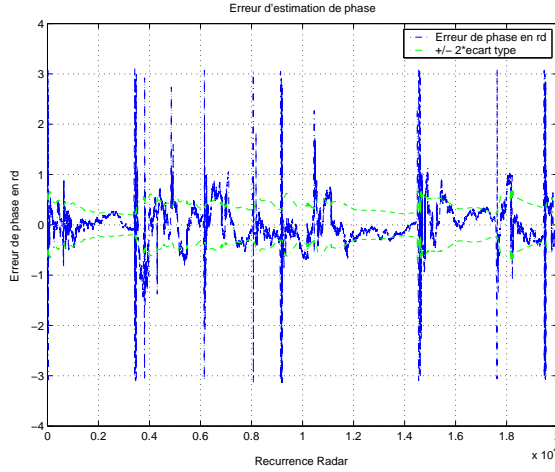
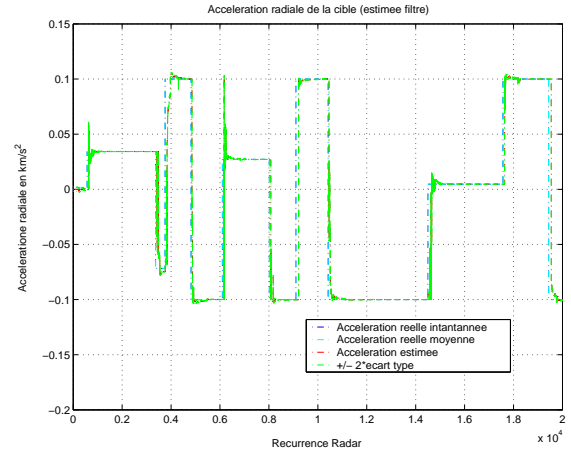
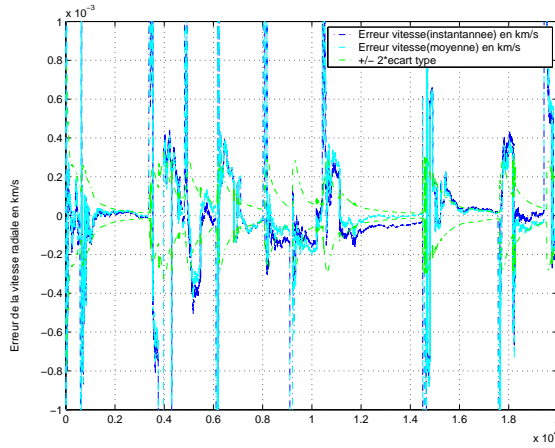
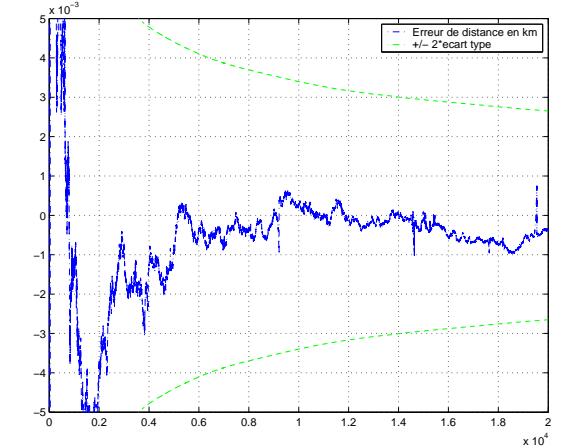
(c) Erreur d'estimation :  
phase globale(d) Estimation : Commandes  
d'accélération radiale(e) Erreur d'estimation :  
vitesse radiale(f) Erreur d'estimation :  
Distance Radar-Cible

FIG. II.3.5 – Performances du filtre particulaire : Estimation des paramètres d'état d'une cible radiale non-fluctuante

Les figures (II.3.4, II.3.5) présentent les performances du filtre particulaire pour le traitement radial d'une cible non-fluctuante. Malgré le faible rapport signal/bruit (jusqu'à  $-10$  dB), le filtre permet la détection des sauts d'accélération et l'estimation efficace de leurs valeurs. De plus, il exhibe des fortes précisions aux régimes permanents (en dehors des phases d'acquisition des sauts) :

- précisions en distance :  $\sim 3$  m.
- précisions en vitesse radiale :  $\sim 0.1$  m/s.

Précisions inatteignables par les techniques classiques même sous hypothèse de stationnarité (pendant une durée raisonnable : 100 récurrences).

En effet, pour une intégration cohérente de 100 récurrences<sup>1</sup>, les précisions optimales sous le RSB moyen de  $-8$  dB sont :

- 19 m pour la distance,
- et 5 m/s pour la vitesse,

Elles sont largement inférieures à celles obtenues par la technique particulière.

L'intégration cohérente longue réalisée par le filtre particulière est ici de l'ordre de 4000 récurrences, malgré la forte dynamique.

### 3 Traitement du scintillement de la cible

La fluctuation électromagnétique de la cible se traduit par une incohérence de phase et/ou d'amplitude. Le filtre particulière doit, donc, détecter l'occurrence d'une fluctuation et réacquérir les paramètres de rétrodiffusion de la cible.

Le modèle électromagnétique d'une cible fluctuante est donné par :

$$\begin{cases} \rho_{k+1} = (1 - \beta\epsilon_k)\rho_k + \delta\rho_k + \beta\epsilon_k\varrho_k \\ \phi_{k+1} = (1 - \epsilon_k)\phi_k + \delta\phi_k + \epsilon_k\theta_k \end{cases}$$

avec :

- $\epsilon_k$  un bruit poissonien binaire  $(0, 1)$  indépendant de fréquence  $\lambda_\epsilon$ ,
- $\theta_k$  un bruit de phase indépendant uniformément distribué sur  $[-\pi, \pi]$ ,
- $\beta$  un paramètre déterministe prenant la valeur 1 pour une incohérence d'amplitude et 0 sinon,
- $\varrho_k$  un bruit d'amplitude indépendant distribué selon une loi de Rayleigh.

La distribution uniforme de  $\theta_k$  et la congruence modulo  $2\pi$  de l'espace des phases permettent de réécrire l'équation de dynamique de la phase de rétrodiffusion, sous la forme :

$$\phi_{k+1} = \phi_k + \delta\phi_k + \epsilon_k\theta_k$$

où,  $\theta_k$  représente ici un saut de phase indépendant uniformément distribué sur  $[-\pi, \pi]$ .

Soit l'équation d'évolution de la phase globale :

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \frac{4\pi}{\lambda} v_{rk} \Delta + \delta\phi_k + \epsilon_k\theta_k$$

L'occurrence poissonienne des fluctuations, et les impératifs de linéarisation de la phase globale nécessitent la discrétisation de la densité de probabilité du bruit  $\epsilon_k\theta_k$ , et donc une étape supplémentaire de Branchement/Sélection de ce bruit de phase au même titre que le bruit de commande d'accélération.

L'incohérence d'amplitude de rétrodiffusion se traduit par une simple réinitialisation de l'amplitude pour les hypothèses particulières telles que  $\epsilon_k = 1$  (occurrence d'une fluctuation).

Pour les mêmes caractéristiques de radar du paragraphe 2-4-1, nous présentons ci-dessous, les performances obtenues dans le cas de cible fluctuante en phase et en phase/amplitude pour un même scénario cinématique.

---

<sup>1</sup>Pour la vitesse moyenne de 300 m/s, la distance parcourue pendant cette période est de 30 m. De même, la variation de vitesse pour un changement d'accélération moyen de 50 m/s<sup>2</sup> est de 5 m/s, soit un déphasage de  $\frac{5\pi}{3}$ .

### 3-1 Caractéristiques de la cible

- vitesse max :  $1 \text{ km/s}$
- accélération max :  $0.1 \text{ km/s}^2$  ( $\sim 10g$ )
- changements de commande de pilotage :
  - initialement : commande d'accélération nulle (décélération libre)
  - à  $3.33s$  :  $40m/s^2$  ( mouvement uniforme),
  - à  $6.66s$  :  $-98m/s^2$  (décélération),
  - à  $9.99s$  :  $70m/s^2$  ( mouvement uniforme),
  - à  $13.32s$  :  $72m/s^2$  (accélération),
  - à  $16.65s$  :  $-52m/s^2$  ( mouvement uniforme),

### 3-2 Paramètres cinématiques simulés

La figure (II.3.6) présente le scénario cinématique utilisé pour une cible avec fluctuation de phase seule et fluctuation de phase et d'amplitude.

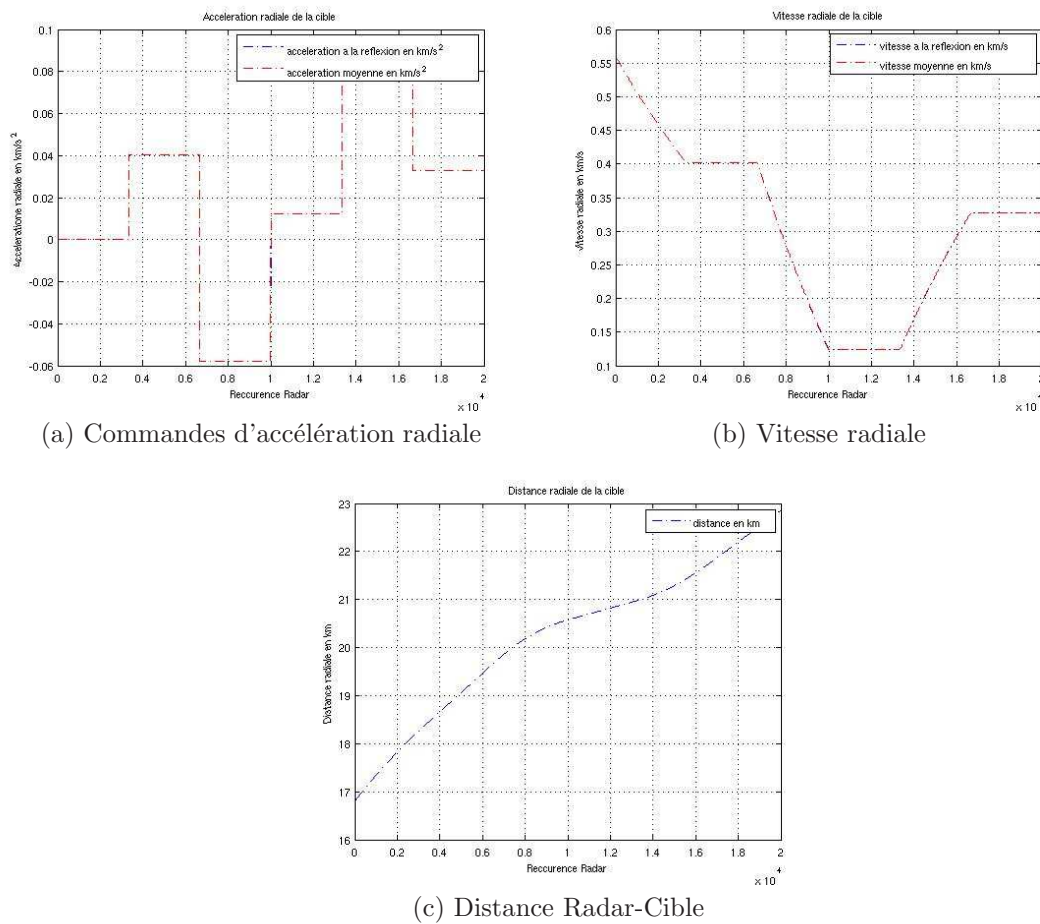


FIG. II.3.6 – Simulation des paramètres cinématiques de la cible (cas radial avec fluctuation de phase et fluctuation de phase/amplitude)

### 3-3 Fluctuation de la phase seule

#### 3-3-1 Paramètres électromagnétiques simulés

- fréquence de fluctuation de la cible :  $10Hz$  (simulé par fluctuation systématique [cas extrême] de la phase au bout de  $100ms$ ),
- $\beta = 0$ .

La figure (II.3.7) décrit l'évolution de ces paramètres (phase et amplitude de rétrodiffusion).

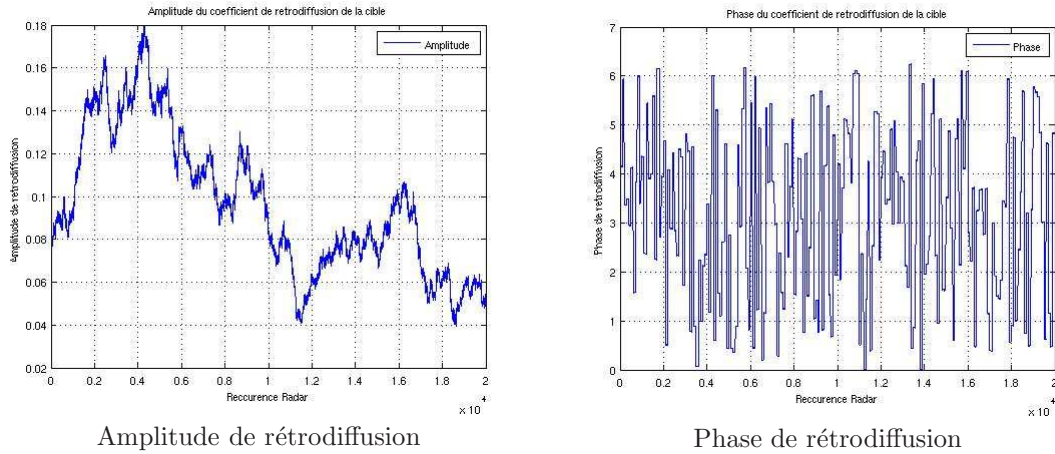


FIG. II.3.7 – Simulation des paramètres électromagnétiques de la cible

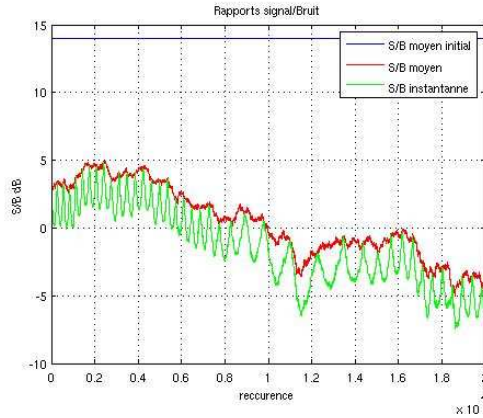


FIG. II.3.8 – Rapport Signal/Bruit

La figure (II.3.8) présente l'évolution du rapport signal/bruit :

- Le RSB moyen initial (en bleu) correspond au rapport signal/bruit à la distance initiale de la cible pour la moyenne de la SER attendue.
- Le RSB moyen (en rouge) correspond au rapport signal/bruit pour la distance instantannée de la cible et la SER réelle (hypothèse de synchronisation de l'échantillonnage).
- Le RSB instantané (en vert) correspond au rapport signal/bruit réel calculé à partir des mesures. Il tient compte de la distance instantannée de la cible, la SER réelle et la désynchronisation de l'échantillonnage, d'où une perte maximale de  $3\text{ dB}$  (échantillons à la mi-hauteur du signal).



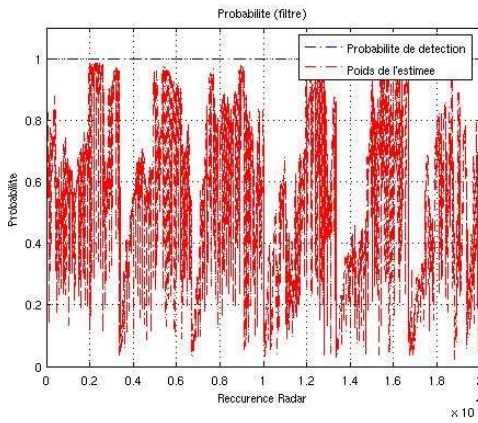
### 3-3-2 Performances du récepteur particulaire

- RSB :  $-5\text{dB}/5\text{dB}$ ,
- Nombre de particules : 768,
- Nombre de points de discrétisation des commandes : 4,
- Seuil de détection d'interpénétration(cf section I.2.6) :  $1/3$ ,
- Intermittence des branchement/Sélection : 1,
- Incertitude initiale de distance :  $150\text{ m}$ ,
- Incertitude initiale de vitesse :  $\sim 8\text{ m/s}$ .

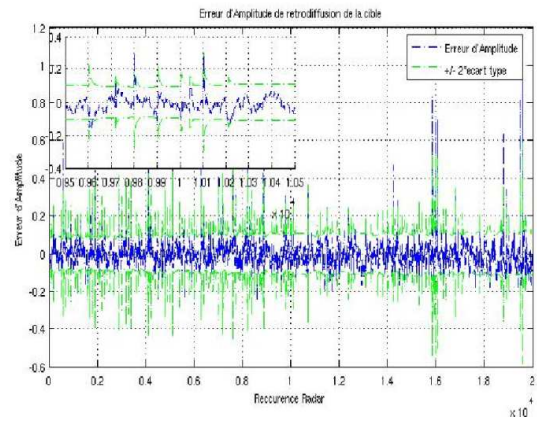
Le filtre particulaire permet (cf figures (II.3.9, II.3.10)) la poursuite des sauts de phase et d'accélération avec des fortes précisions :

- précision de distance  $\sim 1\text{ m} \equiv$  intégration cohérente longue de 5000 récurrences,
- précision de vitesse  $\sim 0.05\text{ m/s} \equiv$  intégration cohérente longue de 5000 récurrences,

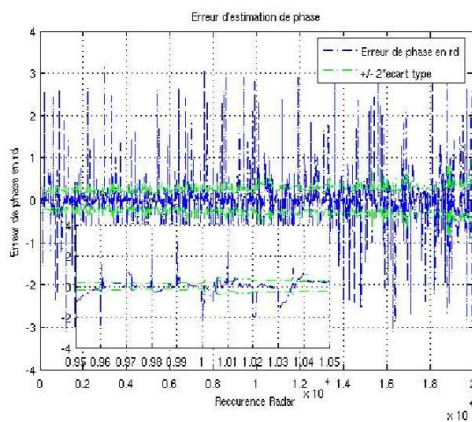
pour un RSB moyen de  $0\text{ dB}$  avec un faible nombre de particules ( $N < 1000$ ).



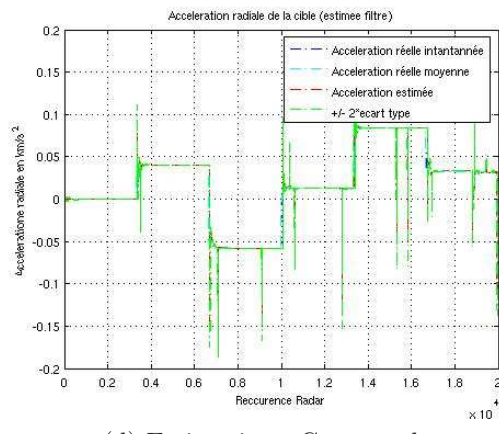
(a) Probabilité de détection



(b) Erreur d'estimation : Amplitude de la SER



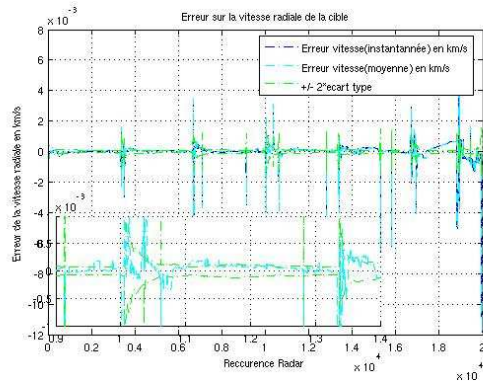
(c) Erreur d'estimation : Phase globale



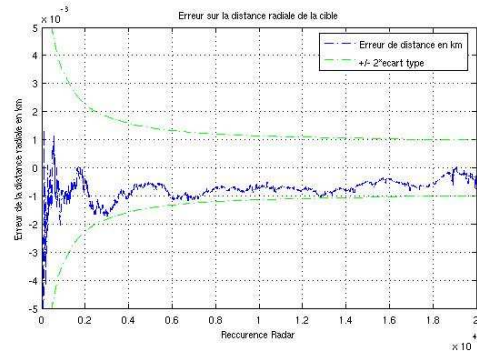
(d) Estimation : Commandes d'accélération radiale

FIG. II.3.9 – Performances du filtre particulaire : Cible radiale avec fluctuation de la phase





(e) Erreur d'estimation :  
Vitesse radiale



(f) Erreur d'estimation :  
Distance Radar-Cible

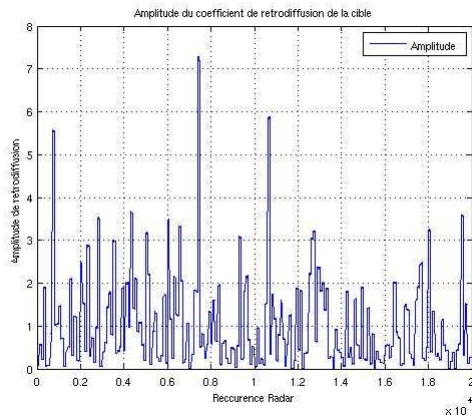
FIG. II.3.10 – Performances du filtre particulaire : Cible radiale avec fluctuation de la phase

### 3-4 Fluctuations de phase et d'amplitude

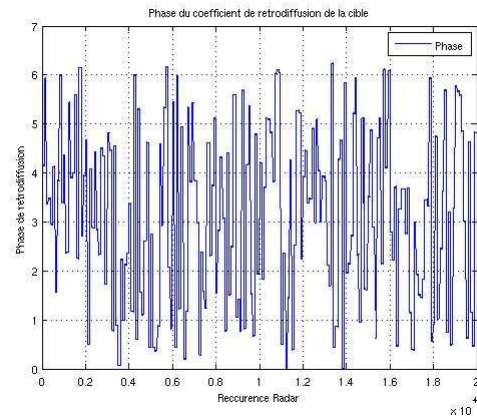
#### 3-4-1 Paramètres électromagnétiques simulés

- fréquence de fluctuation de la cible :  $10Hz$  (simulé par fluctuation systématique de la phase au bout de  $100ms$ ),
- $\beta = 1$ .

La figure (II.3.11) présente l'évolution des paramètres électromagnétiques de la cible.



(a) Amplitude de rétrodiffusion



(b) Phase de rétrodiffusion

FIG. II.3.11 – Simulation des paramètres électromagnétiques de la cible (avec fluctuations de phase et d'amplitude)

Le rapport signal/bruit dépend de la SER de la cible. Son évolution (Figure (II.3.12)) présente des fortes variations dans le cas de cible scintillante.

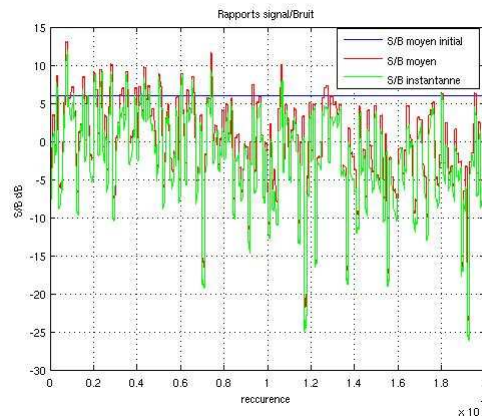


FIG. II.3.12 – Rapport Signal/Bruit

### 3-4-2 Performances du récepteur particulière

- RSB :  $-10dB/10dB$ ,
- Nombre de particules : 2800,
- Nombre de points de discrétisation des commandes : 100,
- Seuil de détection d'interpénétration :  $1/3$ ,
- Intermittence des Branchement/Sélection : 10,
- Incertitude initiale de distance :  $150\text{ m}$ ,
- Incertitude initiale de vitesse :  $\sim 8\text{ m/s}$ .

La figure (II.3.13) présente :

- la probabilité de détection de la cible (bleu) : indicateur d'accrochage,
- le poids de la particule la plus massive (rouge) : indicateur de discrimination des positions particulières.

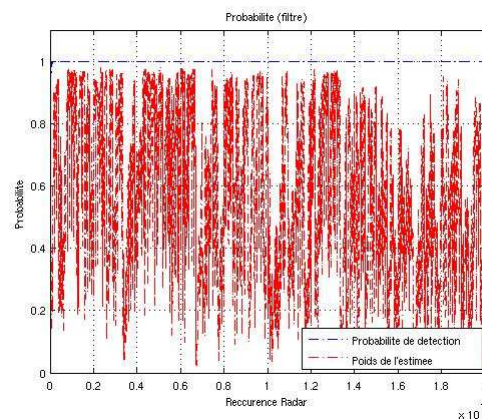
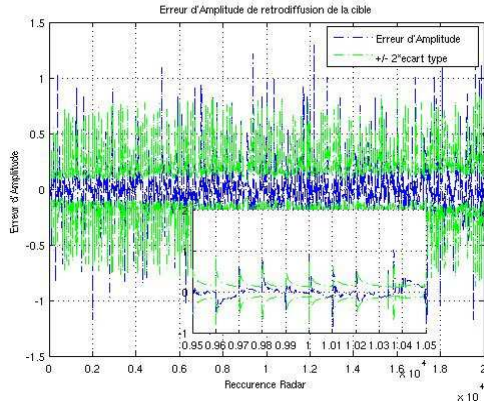


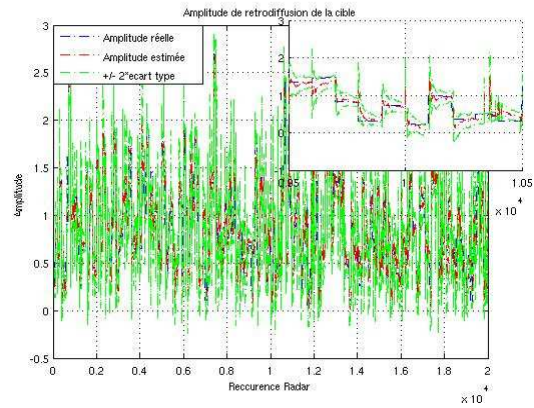
FIG. II.3.13 – Performances du filtre particulaire : Probabilité de détection de la cible (radiale avec fluctuations de phase et d'amplitude)

Les précisions du filtre à particules déterministes de Gauss (figures (II.3.14, II.3.15)) sont équivalentes à celles obtenues dans les cas précédents :

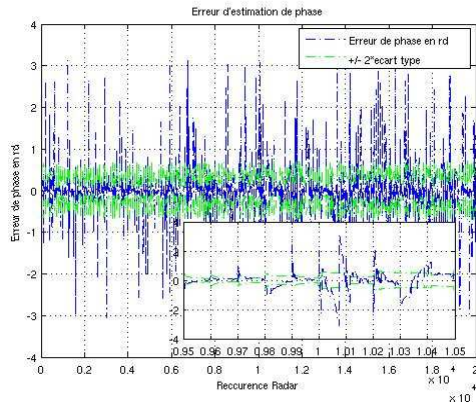
- de l'ordre de 1  $m$  pour la distance,
  - et de 0.05  $m/s$  pour la vitesse radiale,
- avec une poursuite fidèle des sauts d'amplitude.



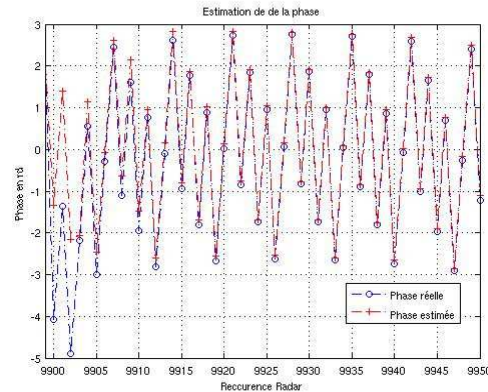
(a) Erreur d'estimation :  
Amplitude de la SER



(b) Estimation : Amplitude de la SER



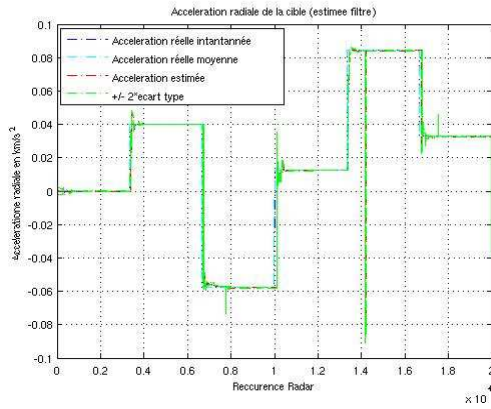
(c) Erreur d'estimation :  
Phase globale



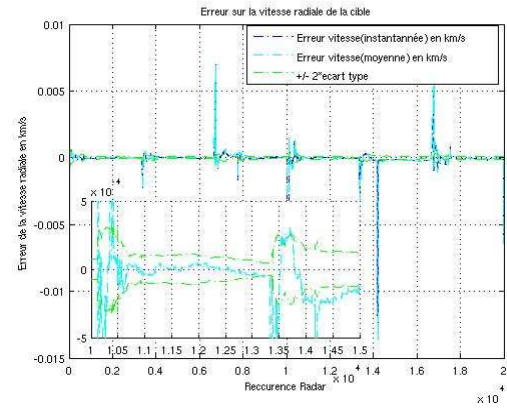
(d) Estimation : Phase globale

FIG. II.3.14 – Performances du filtre particulaire : Estimation des paramètres d'état d'une cible fluctuante en phase et amplitude

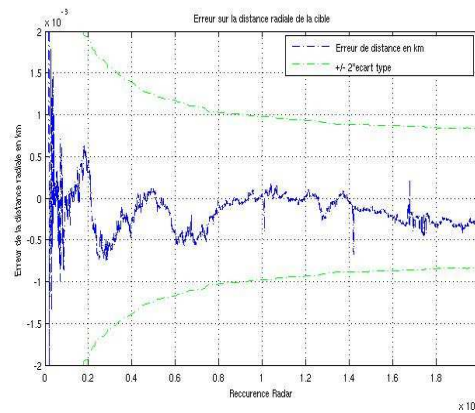
L'augmentation du nombre de particules est nécessaire pour supporter les chutes importantes du rapport signal/bruit, jusqu'à  $-25$   $dB$ , sans décrochage.



(e) Estimation : Commandes  
d'accélération radiale



(f) Erreur d'estimation :  
vitesse radiale



(g) Erreur d'estimation :  
Distance Radar-Cible

FIG. II.3.15 – Performances du filtre particulaire : Estimation des paramètres d'état d'une cible fluctuante en phase et amplitude

## 4 Traitement en 3D des mesures Radar

L'extension à la localisation tri-dimensionnelle de cible ne nécessite pas d'adaptation particulière de l'algorithme particulaire. Développé pour le cas général de l'estimation non-linéaire de variables d'état continues, son application au traitement des informations radiales et angulaires ne requiert que la définition du modèle d'état correspondant et le calibrage des paramètres du filtre (discrétisations a priori, nombre de particules, ...).

L'application numérique présentée ici correspond à une simulation pour un radar de type ARMOR retenu pour l'évaluation contractuelle en cours des performances particulières sur données réelles.

### 4-1 Modèle d'état

#### 4-1-1 Équation de mesures

L'Armor possède une antenne parabolique avec formation des voies sommes et différences dont le diagramme vectoriel peut être approché<sup>2</sup> par :

$$D(\theta - \theta^0, \psi - \psi^0) = \begin{pmatrix} \Sigma \\ \Delta_s \\ \Delta_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{G} \exp \left( -2 \ln(2) \left[ \left( \frac{u}{u_3} \right)^2 + \left( \frac{v}{v_3} \right)^2 \right] \right) \\ K_s \Sigma v \\ K_g \Sigma u \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

où :

- $(\theta^0, \psi^0)$  direction de pointage de l'antenne,
- $\Sigma$ ,  $\Delta_s$  et  $\Delta_g$  désignent respectivement les diagrammes somme, différence site et différence gisement de l'antenne,
- $G$  gain en puissance de l'antenne,
- $K_s$  et  $K_g$  pentes d'écartométrie respectives en site et en gisement,
- $u_3 = 2 \sin \left( \frac{\psi_3}{2} \right)$ ,  $v_3 = 2 \sin \left( \frac{\theta_3}{2} \right)$  avec  $\theta_3$ ,  $\psi_3$  ouvertures respectives à mi-puissance des diagrammes en site et en gisement,
- $u = -\cos(\theta) \sin(\psi - \psi^0)$  et  $v = \sin(\theta) \cos(\theta^0) - \cos(\theta) \sin(\theta^0) \cos(\psi - \psi^0)$ .

L'impulsion émise est une impulsion avec modulation linéaire de fréquence, dont la fonction d'auto-corrélation<sup>3</sup> (sortie du filtre adapté) est donnée par :

$$h(\tau) = \frac{\sin(\pi\beta\tau(T_i - |\tau|))}{\beta\tau} \text{ si } |\tau| < T_i \quad (3.13)$$

avec :

- $\beta$  coefficient de compression,
- $T_i$  durée de l'impulsion longue.

Pour chaque échantillon  $k$  de la récurrence  $n$ , le vecteur d'observation de  $\mathbb{C}^4$  s'écrit :

$$y_k = K \rho_n \exp(j\Phi_n) D(\theta_n - \theta_n^0, \psi_n - \psi_n^0) h(kT_{IC} - \frac{2R_n}{c}) + v_k \quad (3.14)$$

avec,

- $K$  constante d'amplitude,
- $\Phi_n = \phi_n + 4\pi \frac{R_n}{\lambda_n}$  phase globale du signal,  $\lambda_n$  longueur d'onde de la porteuse,
- $R_n$  distance radar-cible,
- $T_{IC} = \frac{T_i}{\beta}$  durée de l'impulsion comprimée,
- $v_k$  bruit blanc gaussien dans  $\mathbb{C}^4$ .

<sup>2</sup>Sous l'hypothèse de linéarité et de séparabilité de l'écartométrie (traitement classique), vérifiée pour de faibles dépointages d'antenne. Notons toutefois que le diagramme d'antenne qui en découle est non-linéaire.

<sup>3</sup>normalisée par le gain de compression.



### 4-1-2 Équation de dynamique

#### 4-1-2.1 Modèle cinématique

On considère le cas d'une cible fortement manœuvrante évoluant selon une trajectoire tridimensionnelle. Sa trajectoire peut être décrite, en coordonnées cartésiennes, par trois modèles de Singer modifiés (présenté dans le chapitre 2) indépendants. Cette modélisation est retenue pour la simulation de la trajectoire de la cible.

Le faible défilement angulaire des cibles pour les distances considérées permet de recourir à une simplification considérable du modèle cinématique. En effet, l'expression en coordonnées polaires de la position de la cible conduit à un unique modèle de Singer modifié selon l'axe radial, le mouvement angulaire étant décrit par une variable vectorielle linéaire-gaussienne de faible dérive :

– modèle radial :

$$\begin{pmatrix} R_{n+1} \\ V_{n+1}^R \\ \gamma_{n+1}^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_n + T_r V_n^R \\ (1 - \alpha T_r) V_n^R + T_r \gamma_n^R \\ \gamma_n^R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta R_n \\ \delta V_n^R \\ \epsilon_n \omega_n^R \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

où :

- $V_n^R$  et  $\gamma_n^R$  désignent respectivement la vitesse et la commande d'accélération radiales à la recurrence  $n$ ,
- $T_r$  période de recurrence radar,
- $\delta R_n$  et  $\delta V_n^R$  dérivées gaussiennes (faibles),
- $\epsilon_n \omega_n^R$  saut de commandes d'accélération d'occurrence poissonnienne et d'amplitude gaussienne tronquée.
- modèles angulaires :

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ V_{n+1}^A \\ \gamma_{n+1}^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n + T_r V_n^A \\ V_n^A + T_r \gamma_n^A \\ \gamma_n^A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta A_n \\ \delta V_n^A \\ \delta \gamma_n^A \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

avec :

- $A_n$ ,  $V_n^A$  et  $\gamma_n^A$  respectivement position, vitesse et accélération angulaire (site/gisement),
- $\delta A_n$ ,  $\delta V_n^A$  et  $\delta \gamma_n^A$  dérivées gaussiennes (faibles).

#### 4-1-2.2 Modèle électromagnétique

La fluctuation de la cible, due essentiellement à la précession apparente de la cible, est modélisée par un processus gaussien de faible dérive :

$$\begin{pmatrix} \rho_{n+1} \\ \phi_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_n \\ \phi_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta \rho_n \\ \delta \phi_n \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

avec :

- $\rho_n$  et  $\phi_n$  désignent respectivement l'amplitude et la phase de rétrodiffusion,
- $\delta \rho_n$  et  $\delta \phi_n$  bruits blancs gaussiens.

### 4-2 Solution particulière

Le traitement des mesures radar est effectué par un filtre à particule déterministe de Gauss, dont l'algorithme est identique à celui décrit dans le cas radial (cf paragraphe 2-3). Seul l'aléa de l'accélération radiale nécessite une discrétisation fine, il représente l'unique composante du bruit de dynamique donnant lieu à un branchement/sélection à maximum de vraisemblance.

### 4-3 Résultats numériques

#### 4-3-1 Caractéristiques du Radar

- Fréquence porteuse :  $F_p = 3 \text{ GHz}$
- Forme d'impulsion : *impulsion chirp*
- Largeur d'impulsion :  $T_i = 2 \mu s$
- Rapport de compression :  $\frac{T_i}{T_{CI}} = 100$
- Période de recurrence :  $T_r = 3.333 \text{ ms}$
- Fréquence d'échantillonnage :  $F_s = 5 \text{ MHz}$
- Ouverture du diagramme d'antenne en site :  $\theta_3 = 0.57^\circ$
- Ouverture du diagramme d'antenne en gisement :  $\psi_3 = 0.57^\circ$

La figure (II.3.16) présente le diagramme d'antenne de l'ARMOR.

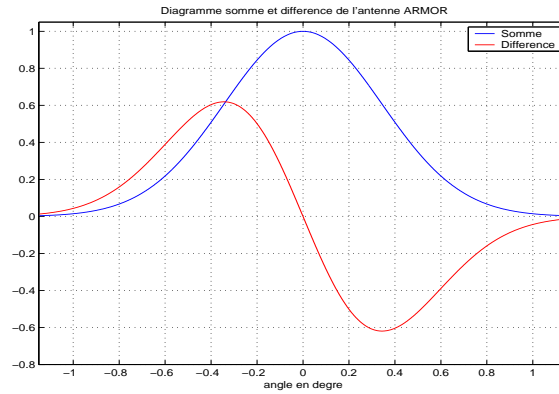


FIG. II.3.16 – Diagrammes d'antenne

#### 4-3-2 Caractéristiques de la cible

On considère une cible fortement manœuvrante évoluant selon une trajectoire 3D. Pour chaque axe :

- Vitesse maximale :  $V_{max} = 1 \text{ km/s}$ ,
- Accélération maximale :  $\gamma_{max} = 0.1 \text{ km/s}^2 \equiv 10 \text{ g}$ ,
- Fréquence de manœuvre :  $\mu = 1 \text{ Hz}$

L'indépendance des sauts des commandes d'accélération axiale se traduit par une manœuvrabilité plus fréquente sur l'axe radial d'amplitude plus élevée.

La figure (II.3.17) présente l'évolution des accélérations et des vitesses axiales, ainsi que la trajectoire 3D de la cible.

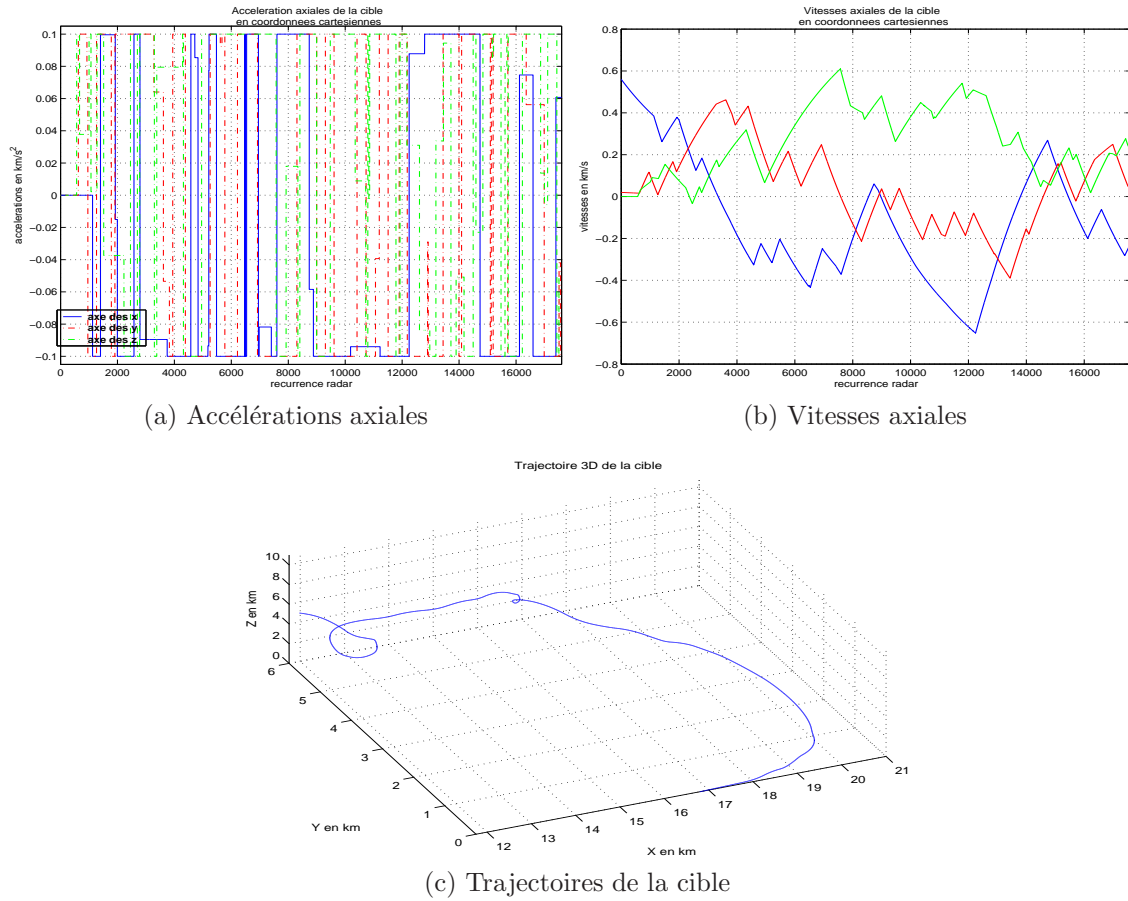


FIG. II.3.17 – Evolution cartésienne de la cible

Leurs transformations en coordonnées polaires sont données par les figures (II.3.18, II.3.19).

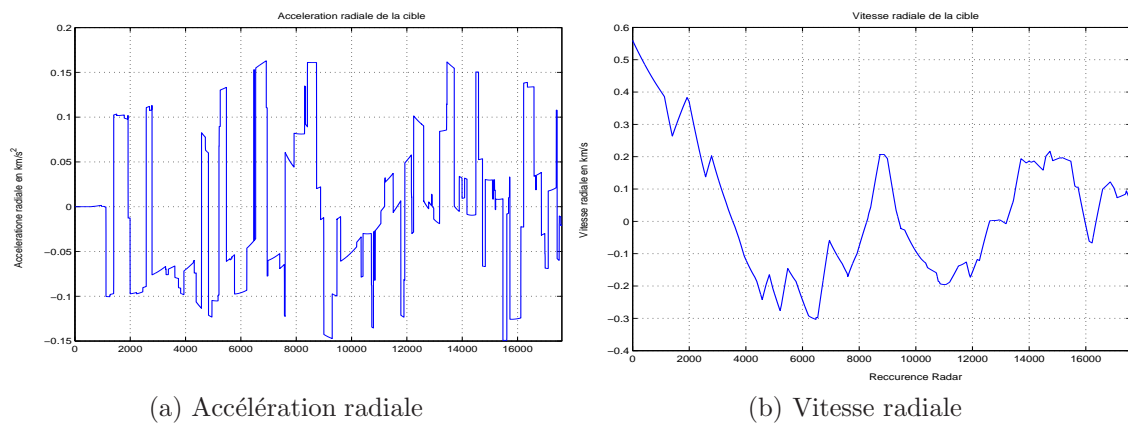


FIG. II.3.18 – Evolution polaire de la cible



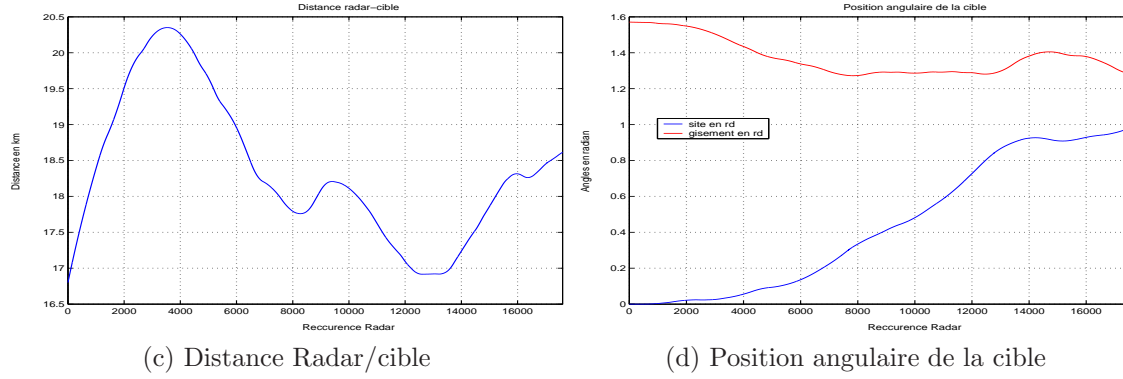


FIG. II.3.19 – Evolution polaire de la cible

La figure (II.3.20) présente l'évolution des paramètres électromagnétiques de la cible.

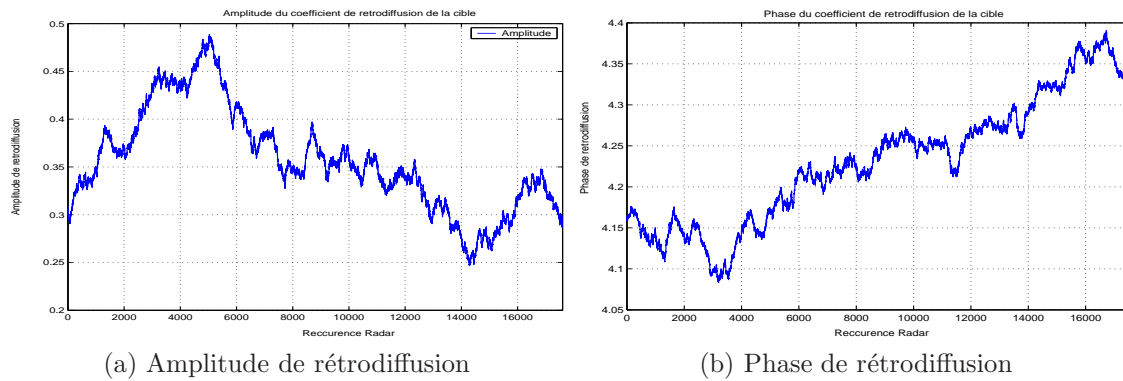


FIG. II.3.20 – Evolution de la rétrodiffusion de la cible

Le rapport signal/bruit considéré dans le traitement angulaire classique est celui de la voie somme. La figure (II.3.21) présente :

- un RSB théorique idéal (rouge) calculé pour un pointage idéal de la cible (écart angulaire nul),
- un RSB effectif (vert) prenant en compte l'écart angulaire et le diagramme d'antenne.

La différence allant jusqu'à  $-11dB$  est due au choix de l'asservissement de la position angulaire de l'antenne lors de la simulation des mesures. L'objectif était de permettre des écarts angulaires importants, donc des baisses considérables de l'observabilité, pour tester la robustesse du récepteur.

#### 4-3-3 Performances du récepteur particulière

- RSB :  $-8dB/0dB$ ,
- Nombre de particules :  $N = 2000$ ,
- Nombre de point de discrétisation des commandes :  $M = 40$ ,
- Intermittence des branchement/sélection :  $T_{BS} = 5$  recurrences,
- Seuil de détection d'interpénétration :  $1/3$ ,
- Incertitude initiale de distance :  $300m$ ,
- Incertitude initiale de vitesse :  $30m/s$ ,

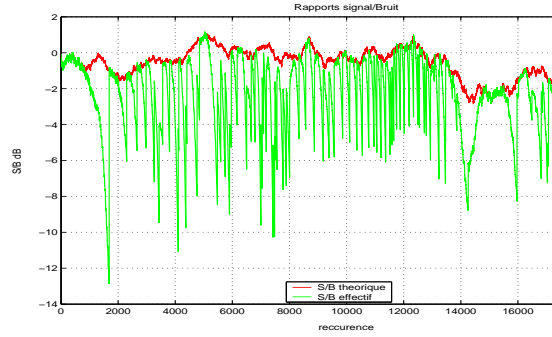


FIG. II.3.21 – Rapport Signal/Bruit

- Incertitude initiale angulaire :  $0.57^\circ$ .

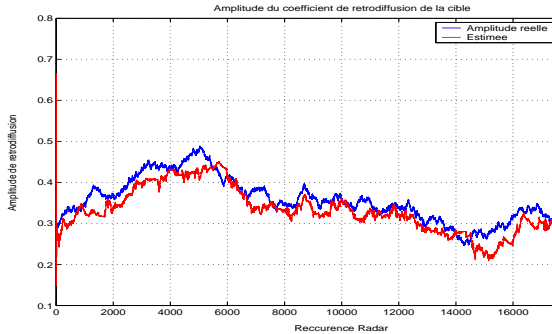
Les Figures (II.3.23, II.3.24) présentent les performances du filtre à particules déterministes de Gauss pour le traitement tri-dimensionnelle des mesures radar.

Malgré l'ajout de nouvelles sources de non-linéarité (diagramme d'antenne) et l'augmentation de la fréquence et de l'amplitude des manœuvres, le filtre particulaire montre une grande capacité de tenue en accrochage pour des RSB négatives (pointes  $< -10dB$ ), confirmant ainsi les gains de 20 dB par rapport aux techniques classiques mis en évidence dans le cas radial.

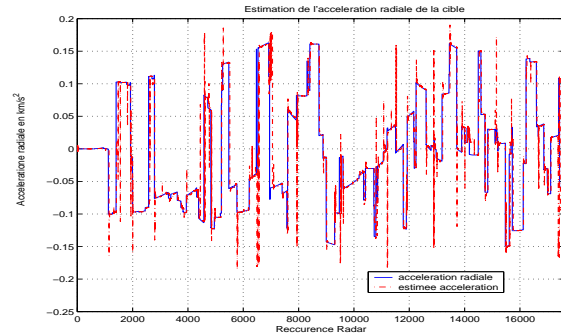
La domination des périodes d'acquisition des sauts d'accélération affecte la précision de l'estimation :

- $\sim 2.5$  m en distance,
- $\sim 0.5$  m/s en vitesse,
- $\sim 5$  mrd en angle.

pendant les brefs régimes permanents.

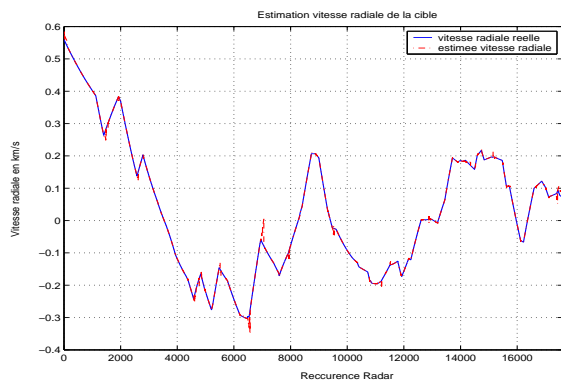


(a) Estimation de l'amplitude.

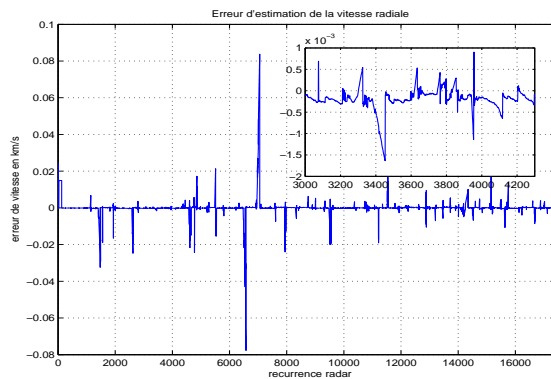


(b) Estimation de l'accélération radiale.

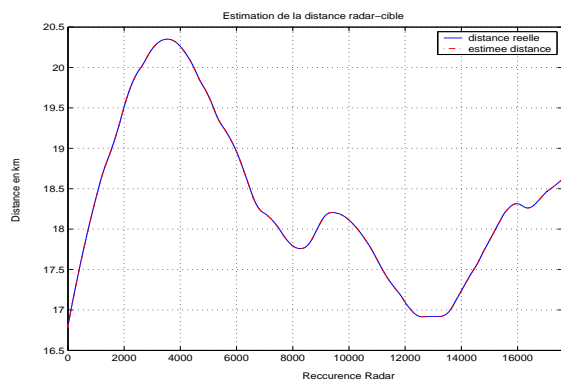
FIG. II.3.22 – Performances du filtre particulaire : Traitement 3D des mesures



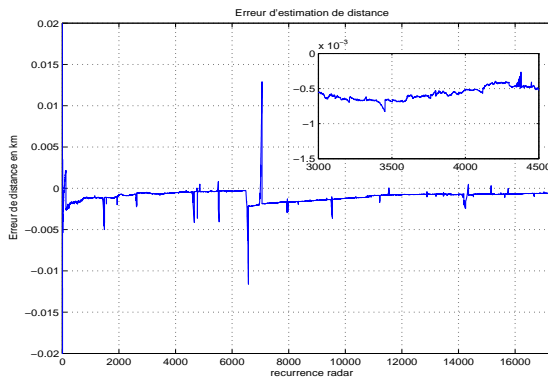
(c) Estimation de la vitesse radiale.



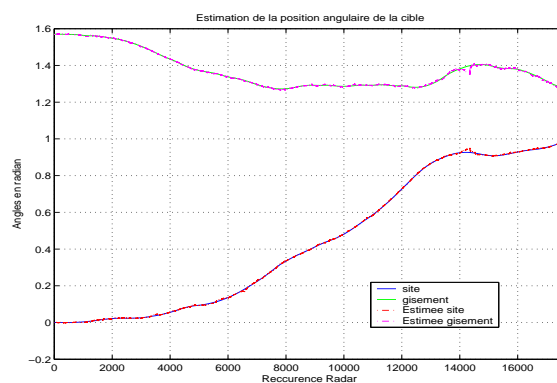
(e) Erreur d'estimation de la vitesse radiale.



(f) Estimation de la distance.



(g) Erreur d'estimation de la distance.



(h) Estimation des angles.

FIG. II.3.23 – Performances du filtre particulaire : Traitement 3D des mesures

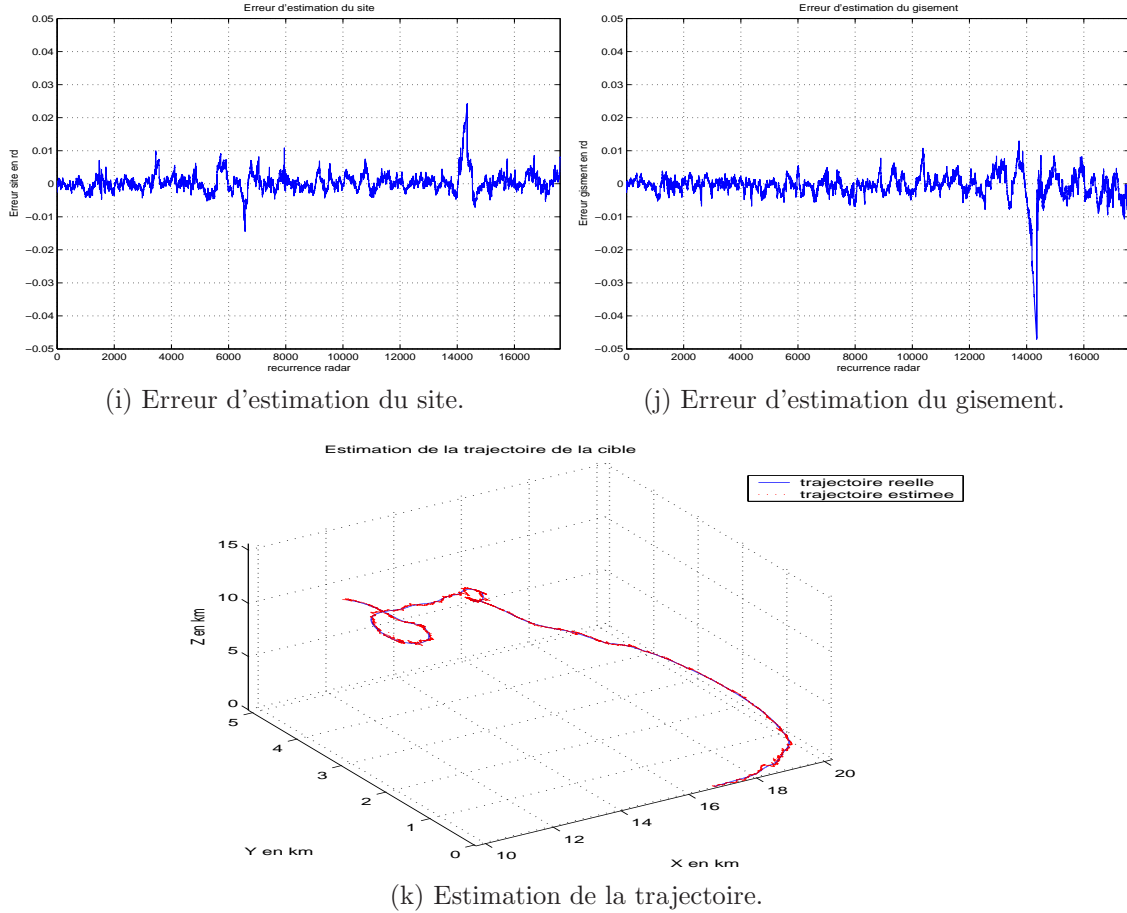


FIG. II.3.24 – Performances du filtre particulaire : Traitement 3D des mesures

Les performances du traitement particulaire des informations radiales et angulaires du filtre particulaire déterministe font actuellement l'objet d'étude contractuelle sur données réelles.

## 5 Conclusion

Les résultats des simulations présentées dans ce chapitre montrent les hautes performances de la technique particulaire déterministe pour des facteurs de charge de  $\pm 10g$  par seconde en moyenne. Cette technique permet une tenue d'accrochage pour des rapports signal/bruit allant jusqu'à  $-20\text{ dB}$ , avec des précisions de l'ordre du mètre pour la distance et d'une dizaine de centimètres par seconde pour la vitesse radiale.

On retrouve le gain de  $20\text{ dB}$  en moyenne apporté par le filtre particulaire aléatoire [Noyer 96] mais avec un nombre de particule avoisinant le millier, au lieu de la centaine de milliers. En effet, l'intégration cohérente longue de la dynamique permise par le maillage particulaire permet de réhausser considérablement le rapport signal/bruit. Il en résulte une amélioration conséquente des seuils de détection et des capacités de poursuite.

L'exploration déterministe optimisée se traduit par une réduction considérable du nombre de particules nécessaire. Cette économie, cruciale pour une application réaliste, a motivé la reprise des études sur données réelles des performances des récepteurs particuliers des signaux Radar.

## Chapitre 4

# Traitement de données réelles

### 1 Introduction

Les résultats présentés précédemment montrent le gain de performances et l'économie de calcul que permet le récepteur à particules déterministes de Gauss sur signaux radar. L'ensemble de ces résultats a été obtenu sur données simulées aussi réalistes que possible. Toutefois la validation de cette technique se devait d'être complétée par des données réelles. Ce fut l'objet de l'étude contractuelle concernant le retraitement par la technique particulière déterministe des enregistrements du radar J11B, utilisé lors de la précédente campagne particulière aléatoire [Noyer 00]. L'objectif de cette étude était :

- d'une part, de confirmer les gains de performances, par rapport aux techniques classiques, obtenus en simulation,
- et d'autre part, d'évaluer pour de mêmes conditions opératoires l'économie de calcul par rapport à la méthode particulière aléatoire.

Ce chapitre présente une synthèse des résultats obtenus lors de cette étude.

### 2 Caractéristiques du Radar J11B

Le J11B est un radar de veille/poursuite, à antenne réseau. La formation, en hyperfréquence, des voies somme et différence rend son comportement équivalent à celui d'une antenne monopulse avec deux récepteurs équivalents. Le comportement angulaire du radar ne concerne pas les scénarios pseudo-radials visés par la présente étude. Le gain d'antenne est donc implicitement intégré dans le terme d'amplitude  $K_0$  du signal radar. Les variations d'amplitude et de la phase de la voie somme sont ici assimilées à des dérives de la phase et de l'amplitude du signal reçu.

Caractéristiques du J11B [Noyer 00] :

- Fréquence d'émission :  $3GHz$ ,
- Période de récurrence :  $600Hz$ ,
- Facteur de compression : 100,
- Durée de l'impulsion comprimée :  $0.2\mu s$ ,
- Fréquence d'échantillonnage :  $5MHz$ ,
- Largeur de la case distance :  $30m$ .

### 3 Caractéristiques de la cible

Les enregistrements ont été effectués sur un aéronef de type *Falcon 20* de vitesse min/max de 85/220 *m/s* évoluant à altitude quasi-constante et à azimut stable selon des trajectoires de ralliement [Noyer 00] avec accélération/décélération.

## 4 Remarques sur les enregistrements et adaptation du Filtre particulaire

### 4-1 Validité des récurrences

[Noyer 00] remarque, lors de la première campagne de traitement particulaire du J11B par la technique aléatoire, la présence de récurrences invalides (cf figure II.4.1 page 134), avec une alternance paire/impair de ces récurrences et une périodicité de commutation égale à 4 secondes : périodicité du calibrage du radar J11B.

Nous adoptons ici les mêmes conditions que la précédente étude, soit :

- rejet des récurrences invalides (une sur deux) : ceci revient à considérer une fréquence de répétition des impulsions de 300 Hz.
- prédiction pure pendant la phase de calibrage du radar : 200 récurrences sont rejetées pendant cette phase (soit 100 avec la fréquence de répétition de 300 Hz).

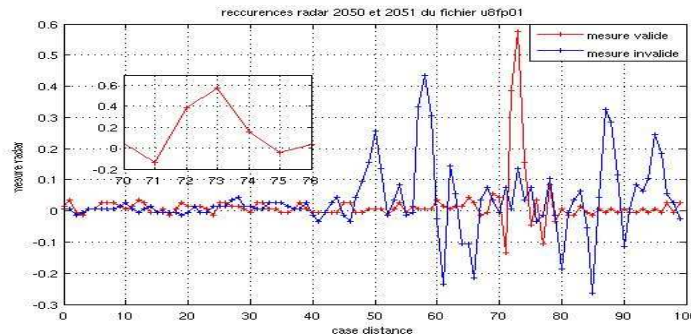


FIG. II.4.1 – Récurrence valide et invalide du J11 signal enregistré

### 4-2 Forme de l'impulsion radar

En plus de l'atténuation des lobes secondaires sur le signal mesuré, relevée lors de la première campagne d'exploitation des données J11B, nous avons remarqué un élargissement du lobe principal : trois points d'échantillonnage sur ce lobe au lieu de deux (cf figure (II.4.1)).

A défaut d'informations supplémentaires, la prise en compte de 4 points sur l'impulsion permet de réduire l'effet de l'atténuation des lobes secondaires sur l'estimation [Noyer 00]. Par ailleurs, l'élargissement du lobe principal a été représenté, dans le traitement particulaire, par un coefficient inconnu de sous-compression de l'impulsion. Ce coefficient s'ajoute aux paramètres estimés par les FKE élémentaires.

### 4-3 Saut de distance

Le traitement par la technique à particules déterministes de Gauss des données J11B a révélé la présence de sauts de distance de l'ordre d'une case distance sur des durées trop brèves pour être imputables à un comportement cinématique de cible. Il s'agit vraisemblablement d'anomalies dues à la chaîne d'acquisition et d'enregistrement du signal.

La présence de ces sauts de distance a été confirmée par l'identification (simplifiée) de la case distance où se trouve la cible (cf figure (II.4.2)) ainsi que l'observation du signal à fort rapport Signal/Bruit des récurrences correspondant à l'occurrence de tels sauts (cf figure (II.4.3)).

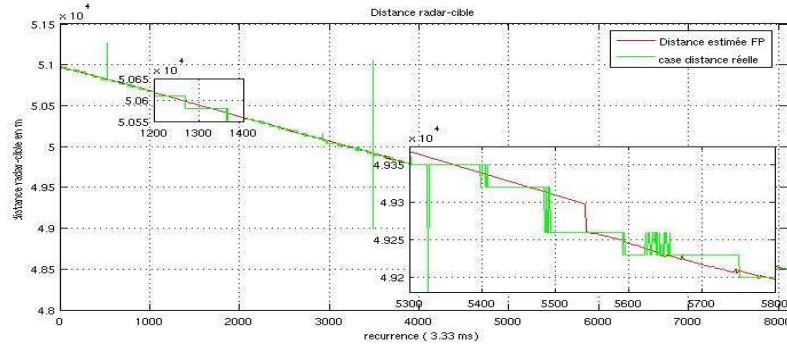


FIG. II.4.2 – Saut de distance observé par le filtrage particulaire et l'évolution de la case distance de la cible

Un bruit à occurrence poissonnienne et à valeur uniformément répartie sur l'intervalle  $[-2 * \text{case distance}, +2 * \text{case distance}]$  a été ajouté au modèle dynamique d'évolution de la distance radar/cible pour modéliser ces sauts :

$$R_{k+1} = R_k + v_{rk} \Delta + \varepsilon_k r_k$$

Les besoins de linéarisation imposent une discrétisation de la densité de probabilité de  $\varepsilon_k r_k$ , et donc une étape supplémentaire de Branchement/Sélection des sauts de distance au même titre que les sauts de phase et de commande d'accélération.

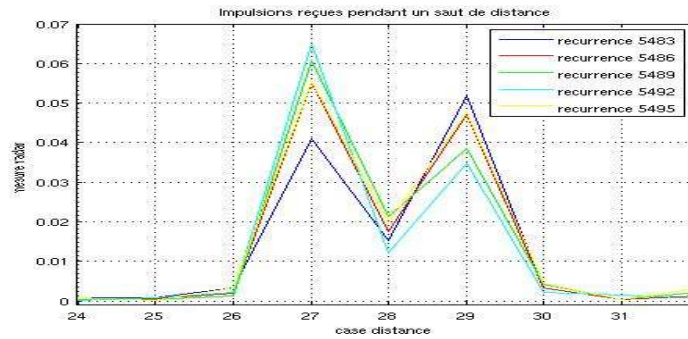


FIG. II.4.3 – Impulsions reçues au voisinage d'un saut de distance



## 5 Prétraitement et bruitage numérique des données

Les données J11B présentent un rapport signal/bruit élevé (20 à 30dB), ainsi qu'un léger décentrage de la moyenne des bruits [Noyer 00].

Nous reprenons, donc, le même prétraitement : recentrage et normalisation du signal reçu et bruitage numérique pour obtenir les RSB souhaités :

$$\begin{cases} Y^I = (\Sigma_I - m_I)/100 + \mathcal{N}(0, \sigma) \\ Y^Q = (\Sigma_Q - m_Q)/100 + \mathcal{N}(0, \sigma) \end{cases}$$

## 6 Résultats numériques

### 6-1 Traitement de la passe 1

#### 6-1-1 Description de la passe

Cette passe concerne une cible de vitesse quasi-constante d'environ 90 m/s, en mouvement quasi-rectiligne selon l'axe radar-cible.

Décentrage de la moyenne des bruits[Noyer 00] :

- $m_I = 1.5$ ,
- $m_Q = 1.5$ .

#### 6-1-2 Performances du récepteur particulaire

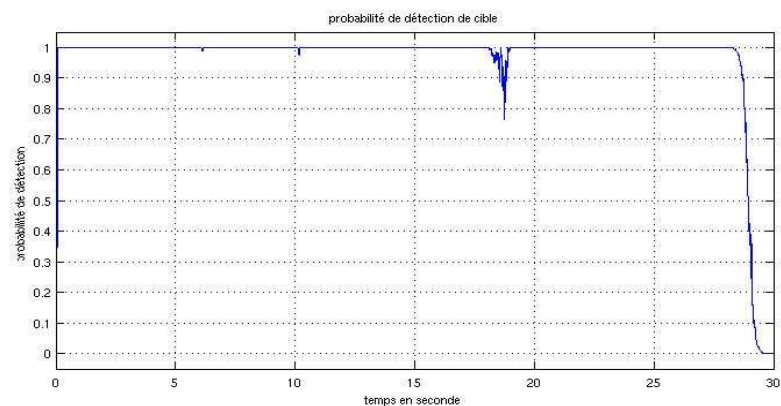
##### Paramètre du Filtre

- Rapport signal/bruit :  $-15dB/2dB$ ,
- Nombre de particules : 2000,
- Nombre de points de discrétisation des commandes : 10,
- Seuil de détection d'interpénétration : 1/3,
- Intermittence des Branchement/Sélection : 10,
- Incertitude initiale de distance : 750 m,
- Incertitude initiale de vitesse : 15 m/s.

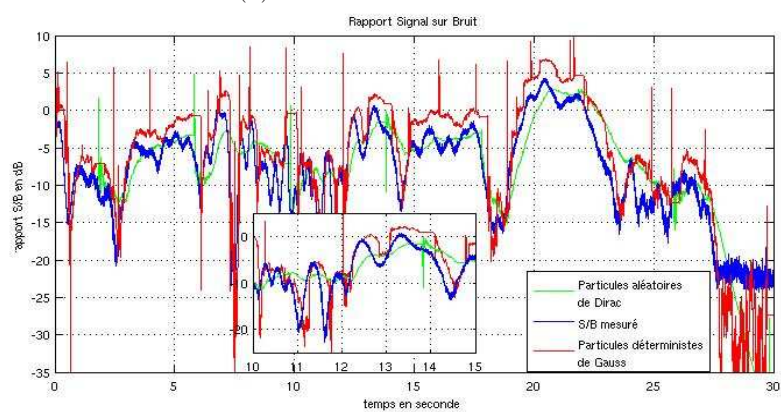
##### Résultats obtenus

Les figures (II.4.4, II.4.5) présentent une comparaison des performances obtenues par les versions déterministe et aléatoire du filtre particulaire. Il y apparait clairement que la technique déterministe à particules gaussiennes permet :

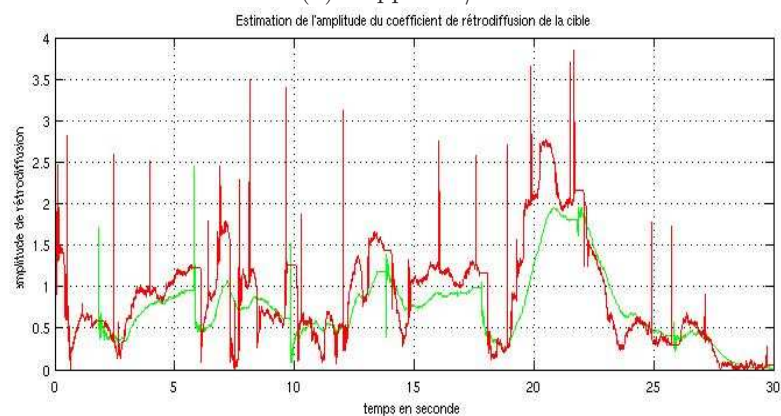
- de meilleures précisions de l'estimation des paramètres cinématiques de la cible,
- une poursuite plus fidèle des fluctuations de la SER (cf. courbes du Rapport S/B figure II.4.4),
- 2000 particules au lieu de 100000.



(a) Probabilité de détection

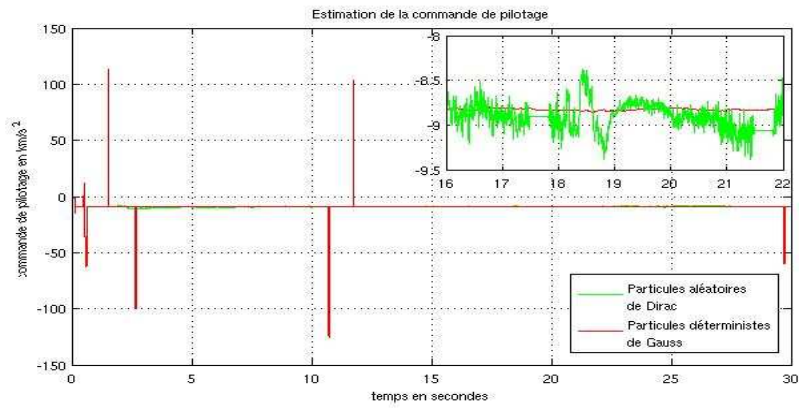


(b) Rapport S/B

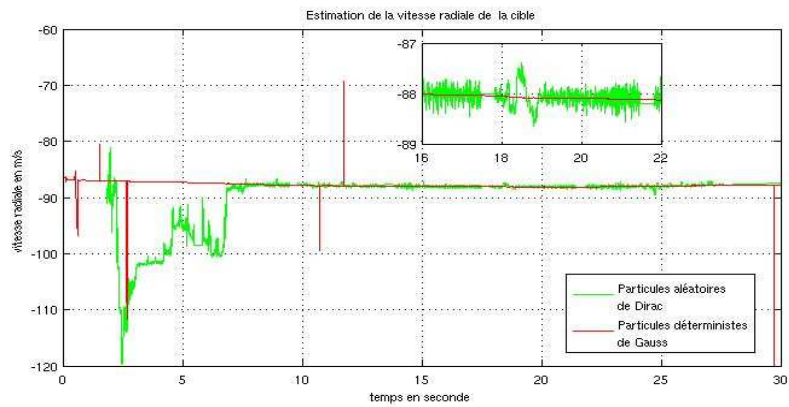


(c) Estimation de l'amplitude de rétrodiffusion

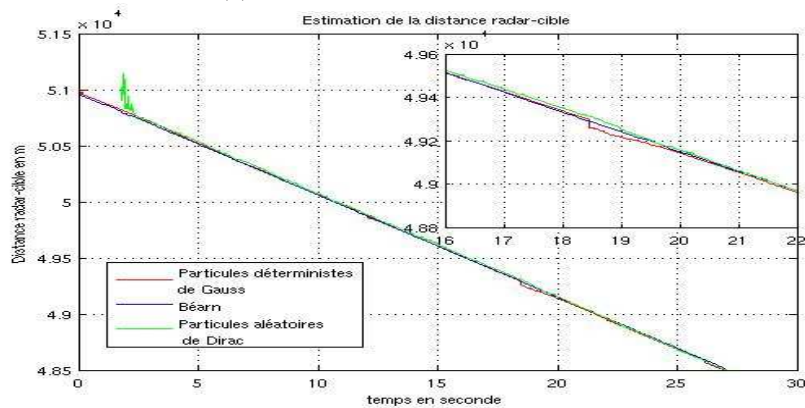
FIG. II.4.4 – Performances particulières : Passe 1



(d) Estimation des commandes d'accélération



(e) Estimation de la vitesse radiale



(f) Estimation de la distance radar-cible

FIG. II.4.5 – Performances particulières : Passe 1 (Suite)

## 6-2 Traitement de la passe 5

### 6-2-1 Description de la passe

Cette passe concerne une cible uniformément décélérée, en mouvement quasi-rectiligne selon l'axe radar-cible.

Décentrage de la moyenne des bruits[Noyer 00] :

- $m_I = 1.8$ ,
- $m_Q = 1.0$ .

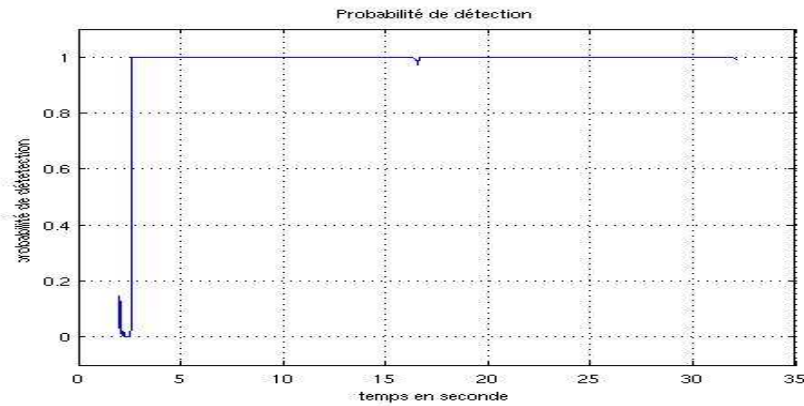
### 6-2-2 Performances du récepteur particulaire

#### Paramètres du Filtre

- Rapport signal/bruit :  $-14dB/3dB$ ,
- Nombre de particules : 2000,
- Nombre de points de discrétisation des commandes : 10,
- Seuil de détection d'interpénétration :  $1/3$ ,
- Intermittence des Branchement/Sélection : 10,
- Incertitude initiale de distance :  $750\text{ m}$ ,
- Incertitude initiale de vitesse :  $15\text{ m/s}$ .

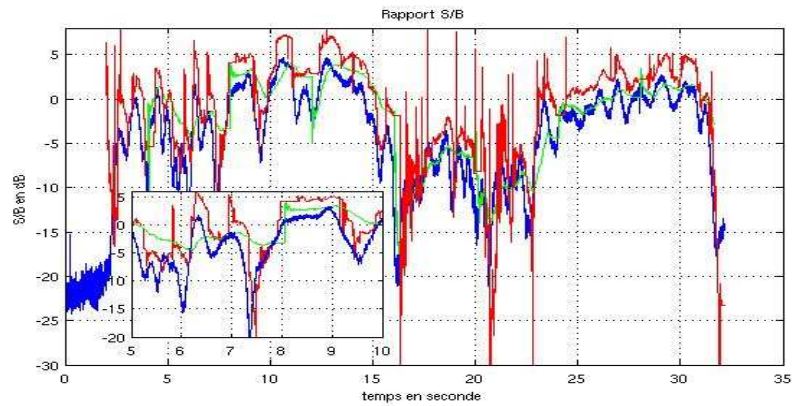
#### Résultats obtenus

Les performances obtenues sur cette passe (cf figures (II.4.6 à II.4.8)) confirment ceux de la passe précédente. On y retrouve l'amélioration des précisions d'estimation et de poursuite des fluctuations, ainsi que l'économie de particules.

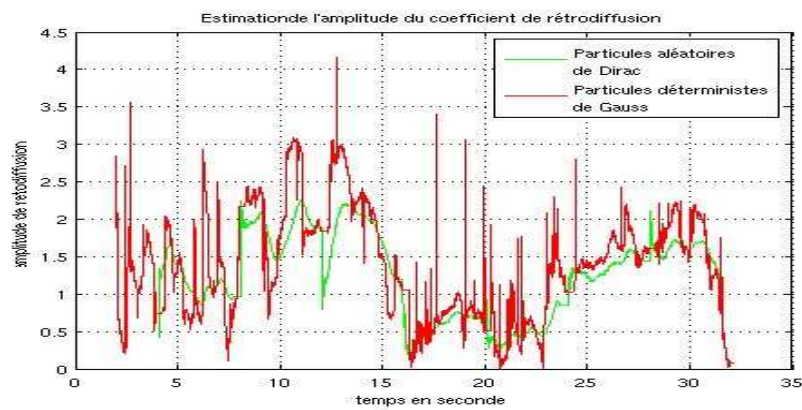


(a) Probabilité de détection

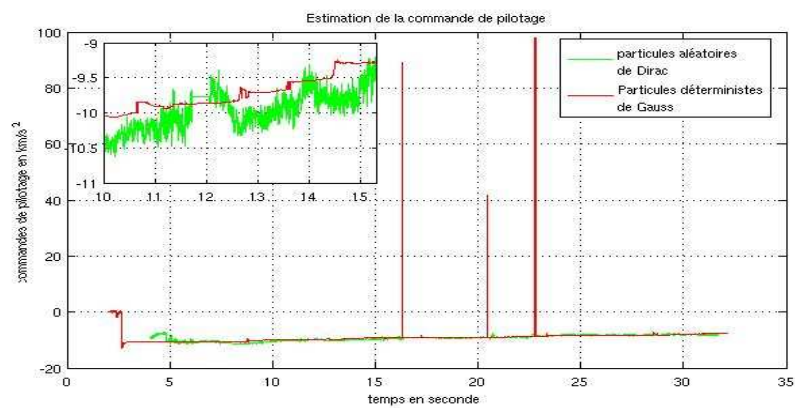
FIG. II.4.6 – Performances particulières : Passe 5



(b) Rapport S/B

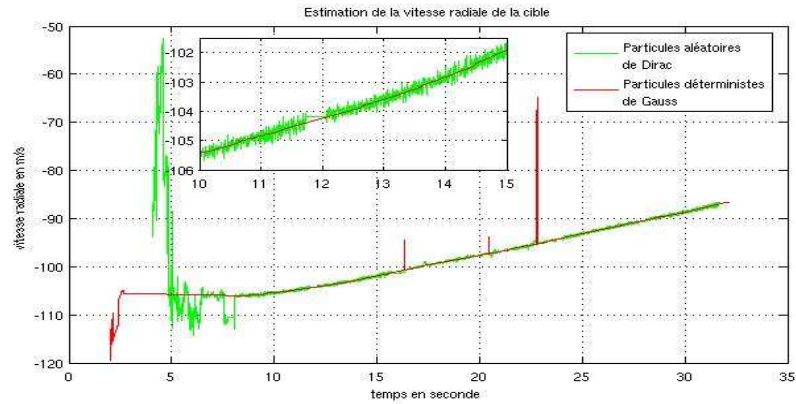


(c) Estimation de l'amplitude de rétrodiffusion

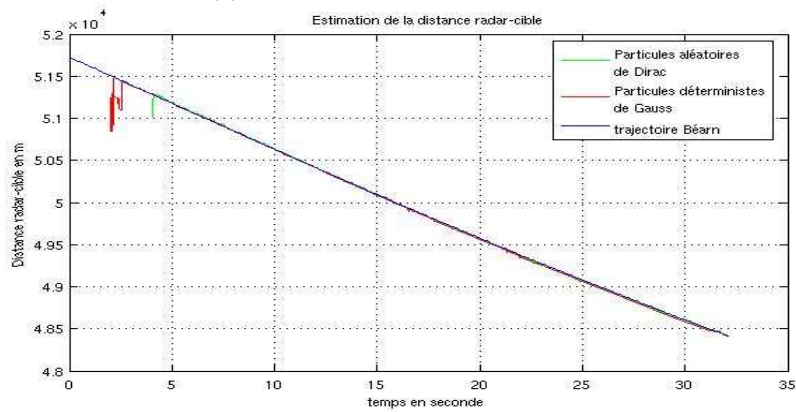


(d) Estimation des commandes d'accélération

FIG. II.4.7 – Performances particulières : Passe 5 (Suite)



(e) Estimation de la vitesse radiale



(f) Estimation de la distance radar-cible

FIG. II.4.8 – Performances particulières : Passe 5 (Suite)

## 7 Commentaires des performances obtenues, comparaison aux résultats de la campagne aléatoire

Il apparaît clairement des résultats présentés ci-dessus que la technique déterministe à particules de Gauss supplante celle à particules aléatoires de Dirac :

- Meilleure précision pour l'estimation des paramètres cinématiques de la cible. En effet, les variances d'erreur d'estimation des vitesse et commande d'accélération radiales sont plus faibles.
- Poursuite plus fidèle des fluctuations de la SER de la cible (courbes RSB II.4.4 et II.4.7).
- Nombre de particules réduit : 2000 pour la technique déterministe contre 100000 pour la technique aléatoire.

L'estimation de la commande d'accélération radiale, tant par la technique aléatoire que déterministe, pour la passe 5 révèle, contrairement aux conditions usuelles de pilotage, une lente variation continue de ce paramètre. Le filtre particulaire approche cette pente quasi-constante par une trajectoire en escalier avec des sauts de commandes d'accélération relativement rapprochées (de l'ordre de 0.1s). Grâce à la supériorité de sa précision, l'algorithme à particules déterministes rend ce phénomène plus visible ( cf figure II.4.7).

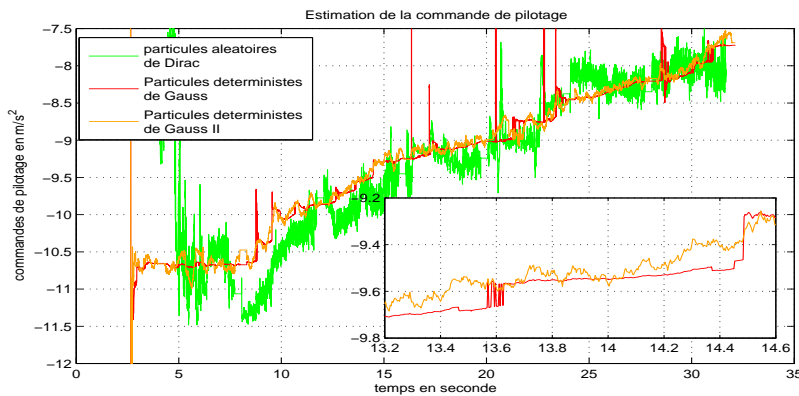


Cette approximation par escalier est réalisée au coût de régimes transitoires plus fréquents. Ceci limite la convergence asymptotique des estimées par l'injection régulière d'une incertitude sur la commande d'accélération. De plus, la réduction des capacités d'exploration du filtre, inversement proportionnelle au rapport entre la fréquence théorique des sauts et celle réelle de changement de palier (escalier), affecte la stabilité du filtre, ce qui se traduit par les pics observés sur les tracés des vitesses et commandes d'accélération estimées lorsque les conditions d'observabilité sont inférieures (S/B avoisinant les  $-20dB$ ) à celles adoptées pour la calibration du filtre particulaire.

Si la modification de certains paramètres du modèle cinématique de la cible (fréquence des sauts et dérivées de la commande d'accélération) suffit à améliorer les performances et la stabilité du filtre (paragraphe suivant), une telle solution ne peut être préconisée dans le cas de forte pente de la commande d'accélération (de l'ordre du pas élémentaire de discrétisation des sauts des commandes) en raison de l'incertitude supplémentaire qu'elle introduit.

## Re-traitement de la passe 5

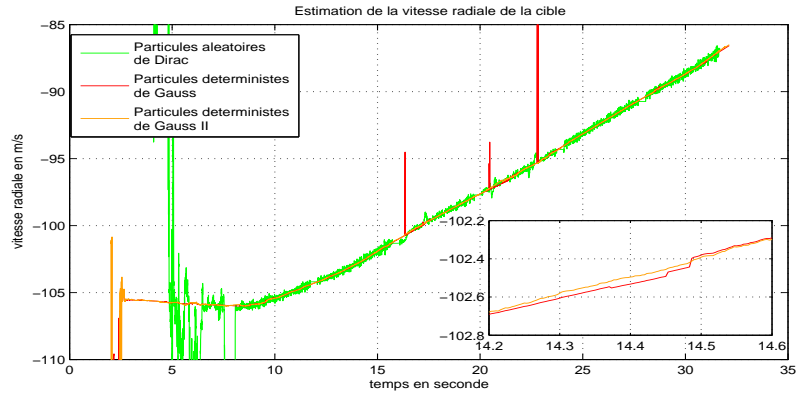
- Fréquence des sauts des commandes d'accélération :  $10^{-4}$  (vs  $10^{-3}$  pour les expériences précédentes),
- variances de la dérive de la commande d'accélération :  $10^{-10}$  (vs  $10^{-12}$  pour les expériences précédentes).



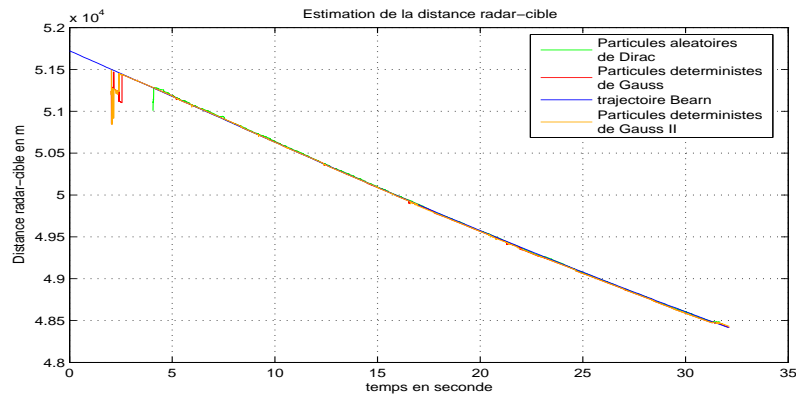
(d) Estimation des commandes d'acceleration

FIG. II.4.9 – Performances particulières : Passe 5 (modification des paramètres du modèle)

L'augmentation de la dérive d'accélération, conjointement à la baisse de la fréquence des sauts, favorise la poursuite de la variation linéaire d'accélération par les filtres FKE locaux (cf figure (II.4.9, II.4.10)). Il est évident qu'une telle solution n'est valable que pour de faibles pentes. Pour des variations plus importantes, il est nécessaire de compléter le modèle de dynamique pour une prise en compte optimale de ce phénomène. La qualité des enregistrements disponibles et l'absence de données de référence précises n'ont pas encouragé ce complément d'étude. Une nouvelle campagne, en cours, de traitement des données réelles issues d'un radar ARMOR permettra éventuellement de confirmer un tel comportement de cible, d'en mesurer l'ampleur et d'adapter le modèle d'état en conséquence.



(e) Estimation de la vitesse radiale



(f) Estimation de la distance radar-cible

FIG. II.4.10 – Performances particulières : Passe 5 (modification des paramètres du modèle) (Suite)

## 8 Conclusion

Malgré les défauts constatés sur les enregistrements J11 exploités par la présente étude :

- récurrences invalides,
- manque d'information sur les conditions opératoires ( caractéristiques de l'impulsion),
- présence de sauts de distance incompatibles avec une évolution réaliste de la cible,

le filtre à particules déterministes de Gauss a permis de retrouver et d'améliorer les performances obtenues lors de la première campagne par le filtrage particulaire "classique" [Noyer 00] pour un nombre de particules 50 fois plus faible.

Le gain en terme de S/B par rapport aux techniques classiques est comparable à celui de [Noyer 00], soit de l'ordre de  $20dB$ . Ceci correspond à la détection de cibles 100 fois plus furtives en puissance ou 3.3 fois plus éloignées en distance. Une appréciation plus précise de ce gain nécessite une confrontation des différentes techniques sur des données plus soigneusement relevées et mieux documentées. Cette confrontation fait actuellement l'objet d'une collaboration contractuelle en cours.





## Chapitre 5

# Récepteur particulière pour radar de veille-poursuite

### 1 Introduction

L'activité radar de veille a été initiée suite à une demande d'expertise informelle de la part de la DGA. Les spécificités de la veille sont moins à même de montrer tout les bénéfices qu'apporte le traitement optimal par la technique particulière à maximum de vraisemblance. En effet, l'intermittence des mesures radars ne permet pas l'intégration cohérente longue (en dimension raisonnable) de la dynamique qu'autorise le filtre particulière. Elle limite, ainsi, les gains de précision accessibles.

Toutefois, les performances en terme d'aptitude de détection de cible, cruciales pour cette application, se voient considérablement réhaussées par la méthode particulière. En effet, sa capacité à traiter des densités à travers le système non-linéaire d'état lui permet d'intégrer les mesures issues de plusieurs tours d'antenne là où les techniques classiques de détection se limitent à un seul.

### 2 Problématique des Radars de veille

#### 2-1 Fonctionnement des Radars de veille

Les radars de veille, dont le rôle principal est la détection de cibles, assurent une surveillance continue de l'espace, par exploration sectorielle et régulière.

L'exploration sectorielle est assurée par un balayage periodique de différentes positions angulaires élémentaires par le faisceau radar. Elle se traduit par une forte intermittence des mesures issues de chacun des secteurs.

Différents procédés sont utilisés pour le balayage des secteurs angulaires. Nous n'en citons, ici, que deux parmi les principaux procédés utilisés :

##### **Radar panoramique**

L'exploration de l'espace est assurée par une rotation continue de l'antenne autour d'un axe vertical. Ce qui correspond à un découpage du plan de gisement en secteurs élémentaires.

Les radars panoramiques utilisent des faisceaux étroits en gisement pour un meilleur pouvoir séparateur angulaire. Leurs diagramme en site est modulé afin d'assurer une surveillance

maximale de l'espace.

Les vitesses de rotation de l'antenne, pour ce type de radar, varient, selon la portée du radar, de 6 tour/ $mn$  pour les portées les plus grandes à 60 tour/ $mn$  pour les plus faibles.

### Radar volumétrique

Le faible pouvoir séparateur en site des radars panoramiques ne permet pas de délivrer la position de la cible en trois dimensions ( distance, site et gisement), dont la connaissance est critique pour certaines applications. Les radars volumétriques permettent de pallier cet handicap. En effet, ces radars procèdent par un découpage sectoriel du plan de site, au même titre que celui de gisement. L'adaptation du faisceau en site à ce découpage permet une bien meilleure estimation de ce paramètre.

Deux procédés principaux sont utilisés pour l'exploration en site :

**Radars à faisceaux étagés** Le faisceau radar est découpé en site en un certain nombre de faisceaux élémentaires, qui reçoivent chacun une partie de l'énergie. A chaque lobe ainsi formé est associé un récepteur particulier, la comparaison des signaux issus de chaque récepteur permet alors de mesurer le site de la cible.

**Radars à double balayage de l'espace** Le faisceau directif et étroit en site et en gisement est animé d'un balayage sectoriel. Les diverses tranches de l'espace sont ainsi explorées successivement. Dans les radars modernes, le déplacement du faisceau en site est assuré par un balayage électronique qui permet plus de souplesse dans l'exploitation.

## 2-2 Réception des mesures

La forte intermittence des signaux issus des différents secteurs angulaires limite les possibilités d'intégration longue de plusieurs récurrences, même sous hypothèse de cible non-maneuvrante. Elle restreint, donc, les performances en détection aux valeurs favorables de rapport Signal/Bruit.

### Détection quadratique

Le traitement classique des signaux pour les radars de veille, est similaire à celui utilisé en poursuite. Il est essentiellement basé sur la détection quadratique d'un signal "stable" dans un bruit. Il consiste à calculer le carré du module du signal reçu, pour chaque récurrence radar. La détection est obtenue lors d'une comparaison favorable du signal, ainsi formé, à un seuil. Le regroupement de plusieurs signaux issus de récurrences différentes permet d'améliorer les performances en détection.

Contrairement au cas de radar de poursuite, l'absence d'affinage particulier du procédé de mesure limite la précision sur la position polaire de la cible aux capacités de discrimination de cibles du système radar lorsqu'elles sont accessibles.

### Post-intégration de récurrences

La post-intégration consiste à calculer la moyenne sur  $n$  récurrences successives des signaux reçus après détection quadratique et avant présentation au seuil. Elle permet, ainsi, de réhausser d'un rapport  $\sqrt{n}$  le rapport signal/bruit, et de repousser du même rapport les limites de détection.

Toutefois, basée sur l'hypothèse de stationnarité de la cible, la post-intégration, pour des radars de veille, est restreinte aux nombres de récurrence correspondant à la durée d'illumination : temps de passage du faisceau dans un secteur angulaire élémentaire. Pour les radars panoramiques, ce temps est donné par :

$$\tau = \frac{\theta_0}{\Omega}$$

où,  $\theta_0$  est l'ouverture à 3 dB en gisement de l'antenne et  $\Omega$  vitesse de rotation de l'antenne.

Le nombre de récurrences utiles en post-intégration est alors donné par :

$$n = \tau f_r$$

où  $f_r$  désigne la fréquence de répétition du radar.

Pour les valeurs numériques usuelles, la limite de détection en rapport Signal/Bruit est de l'ordre de quelques dB positifs ( $\sim 10$  dB).

### Pistage

Les échos observés, à chaque tour d'antenne, peuvent correspondre à des fausses alertes. Ils sont, dans ce cas, fonctions des conditions extérieures et variables d'un tour à l'autre.

Le pistage a pour but d'associer entre eux les échos issus d'une même cible pour différents tours d'antennes. Il permet, d'une part, de confirmer ou d'infirmer les échos, et d'autre part, de former des trajectoires des cibles détectées (positions, vitesses et directions). Ce procédé correspond à une poursuite de cible en post-traitement, dont les performances sont limitées, comme on l'a vu précédemment, par le découpage artificiel du problème.

## 3 Modélisation du problème

Le modèle d'état, pour un radar de veille est similaire à celui utilisé en poursuite. Les seules différences concernent la disponibilité des mesures : Seules  $n_0$  observations sont disponibles par tours d'antenne, et la mesure angulaire se réduit au diagramme d'antenne classique.

Pendant une illumination, le signal reçu à l'entrée de l'antenne est donné par :

$$y(t) = \frac{K_0}{R_{\tau/2}^2} D(\theta_{\tau/2} - \theta_{\text{Radar}}) \sigma s(t - \tau) + b_t$$

où  $R_{\tau/2}$  est la distance radiale de la cible lors de la réflexion et  $\theta_{\tau/2}$  sa position angulaire.  $\tau$  est le temps du trajet aller-retour de l'onde et  $t$  l'instant de sa réception.

Pour des mesures radiales, la mesure angulaire  $D(\theta_{\tau/2} - \theta_{\text{Radar}})$  est supposée être peu variable dans le temps, notamment pendant une illumination. Le signal échantillonné à la sortie du filtre adapté, dans ce cas, s'écrit,

$$y(k) = \frac{K_0}{R_{\tau/2}^2} \sigma h(kT_s - \frac{2R_{\tau/2}}{c}) \exp(j2\pi \frac{2R_{\tau/2}}{\lambda}) + \nu_k$$

où  $h(\cdot)$  désigne la fonction d'autocorrélation de l'impulsion radar et  $T_s$  la période d'échantillonnage (égale à la durée d'impulsion, pour des raisons de blancheur du bruit de mesure échantillonné  $\nu_k$ ).

De même, le comportement cinématique de la cible peut être décrit par le même modèle de Singer modifié utilisé en poursuite. Bien qu'il soit assez précis pour décrire le comportement de la cible, ce modèle s'encombre de paramètres (accélération) inobservables à travers des observations intermittentes. Seul le comportement moyen des paramètres cinématiques de la cible peut être observé pendant les périodes aveugles. Le modèle cinématique doit donc être modifié en conséquence. Ceci est obtenu en approchant le mouvement de la cible par un mouvement rectiligne uniforme durant l'illumination (de faible durée  $\sim 9 \text{ ms}$  pour les valeurs numériques considérées), et en représentant les sauts des commandes d'accélération par leur effet moyen : un bruit de dérive gaussien de variance convenable.

## 4 Solution particulière

Le caractère global et adaptatif de la solution particulière la prédispose à répondre aux deux exigences du problème de veille : détection de cibles sous faible Rapport Signal/Bruit et pistage des cibles détectées. Deux illuminations successives sont raccordées par la prédiction du modèle et l'accélération moyenne du tour d'antenne correspondant se trouve corrigée par l'illumination suivante.

En présence d'agilité de fréquence par rafale, une phase de Branchement/Sélection déterministe au début de chaque rafale permet de ré-acquérir la phase du signal.

Cette technique permet la corrélation systématique de plusieurs tours d'antenne (en fonction du nombre de particules), avant détection, là où les techniques classiques se basent sur les détections relatives à des tours d'antenne isolés pour le pistage. Elle repousse donc les limites de détection d'un rapport égal au nombre de tours pouvant être intégrés par la capacité de calcul mise en œuvre.

### 4-1 Prédiction pure à nombre de particules constant

La linéarité de l'équation de dynamique relative à la cinématique de la cible et l'approximation des bruits à occurrence poissonnienne par un bruit gaussien de variance  $\lambda Q$  ( $\lambda$  fréquence du poissonien et  $Q$  variance de la variables gaussienne du saut) permettent une prédiction pure à nombre constant de particules gaussiennes. Chacune des gaussiennes évoluent selon la partie prédictive d'un filtre de Kalman classique. Ceci permet d'approcher la densité de probabilité conditionnelle au début de l'illumination suivante.

### 4-2 Redistribution déterministe

A partir de la densité de probabilité, et en se basant sur les intervalles de confiance des gaussiennes élémentaires, une grille de discrétisation est construite à la finesse requise par la renormalisation des variances sur leur plage de linéarisation. On obtient ainsi un domaine d'incertitude continu, dont le nombre de points de discrétisation nécessaire peut être supérieur aux nombres de particules disponibles. Conformément au maximum de vraisemblance, seuls les  $N$  points de discrétisation les plus massifs sont retenus. Ceci permet une discrétisation éparse de l'espace d'incertitude selon la vraisemblance des régions d'état élémentaires.

### 4-3 Traitement de l'incohérence de phase

Pendant la phase d'illumination, l'incohérence de phase est traitée par un Branchement/Sélection déterministe, à travers une discrétisation équiprobable selon l'axe de la phase.

Chaque particule se voit ainsi attribuer  $M$  descendants permettant une exploration “exhaustive” de la phase de rétrodiffusion. Ce branchement est suivi d’une étape de sélection à maximum de vraisemblance pour garantir la constance du nombre total de particules.

#### 4-4 Probabilité de détection

La probabilité de détection normalisée, à l’instant  $k$ , est donnée par le rapport :

$$P_d = \frac{p(Y_k|\mathcal{H}_1)}{p(Y_k|\mathcal{H}_1) + p(Y_k|\mathcal{H}_0)}$$

où, l’hypothèse  $\mathcal{H}_1$  correspond à la présence d’une cible, donc, du signal dans les mesures  $Y_k$  :

$$y_k = s_k + v_k$$

et,  $\mathcal{H}_0$  absence de signal :

$$y_k = v_k$$

Or, d’une part,

$$p(Y_k|\mathcal{H}_0) = p(Y_k = V_k) = p_v(y_k)p(Y_{k-1}|\mathcal{H}_0)$$

elle peut, donc, être calculée récursivement en marge du filtrage.

D’autre part,

$$\begin{aligned} p(Y_k|\mathcal{H}_1) &= p(y_k|Y_{k-1}, \mathcal{H}_1)p(Y_{k-1}|\mathcal{H}_1) \\ &= p(Y_{k-1}|\mathcal{H}_1) \int_{X_k} p(y_k|x_k, \mathcal{H}_1)p(X_k|Y_{k-1}, \mathcal{H}_1)d_{X_{k-1}} \end{aligned}$$

Or, d’après la discrétisation particulière de l’espace d’état<sup>1</sup>

$$p(X_k|Y_{k-1}, \mathcal{H}_1) \simeq \sum_{i=0}^{N-1} \rho_i p_i(X_k|Y_{k-1}, \mathcal{H}_1)$$

D’où l’approximation,

$$\begin{aligned} p(Y_k|\mathcal{H}_1) &\simeq p(Y_{k-1}|\mathcal{H}_1) \sum_{i=0}^{N-1} \rho_i \int_{X_k} p(y_k|x_k, \mathcal{H}_1)p_i(X_k|Y_{k-1}, \mathcal{H}_1) \\ &\simeq p(Y_{k-1}|\mathcal{H}_1) \sum_{i=0}^{N-1} \rho_i p_i(y_k|Y_{k-1}, \mathcal{H}_1) \\ &\simeq p(Y_{k-1}|\mathcal{H}_1) \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{\rho}_i \end{aligned}$$

Ici,  $p_i(y_k|Y_{k-1}, \mathcal{H}_1)$  et  $\tilde{\rho}_i$  correspondent, respectivement, au terme de normalisation locale et au poids non-normalisé de la particule  $i$ .

---

<sup>1</sup>En toute rigueur,  $p(X_k|Y_{k-1}, \mathcal{H}_1) = \frac{1}{c}p(\mathcal{H}_1|X_k, Y_{k-1})p(X_k|Y_{k-1})$ . Ceci, peut être approché en pratique en éliminant la contribution des hypothèses particulières à très faibles amplitudes ( $\equiv$  absence de signal).

Une approximation de la probabilité de détection normalisée est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
 P_d^k &\simeq \frac{p(Y_{k-1}|\mathcal{H}_1) \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{\rho}_i}{p(Y_{k-1}|\mathcal{H}_1) \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{\rho}_i + p_v(y_k)p(Y_{k-1}|\mathcal{H}_0)} \\
 &\simeq \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \tilde{\rho}_i}{\sum_{i=0}^{N-1} \tilde{\rho}_i + p_v(y_k) \frac{p(Y_{k-1}|\mathcal{H}_0)}{p(Y_{k-1}|\mathcal{H}_1)}} \\
 &\simeq \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \tilde{\rho}_i}{\sum_{i=0}^{N-1} \tilde{\rho}_i + p_v(y_k) \frac{1-P_d^{k-1}}{P_d^{k-1}}}
 \end{aligned}$$

et peut être calculée récursivement par le filtre particulière.

La décision de détection est prononcée quand cette probabilité dépasse un seuil donné. Pour de faibles rapports S/B, une intégration cohérente sur plusieurs tours d'antenne est nécessaire pour une détection "optimale".

## 4-5 Algorithme

1. Initialisation a priori du support selon l'incertitude initiale : secteur d'espace surveillé.
2. Pendant la phase d'illumination du secteur :
  - Au début d'une rafale, Branchement/Selection selon la discrétisation du domaine d'incertitude en phase de rétrodiffusion.
  - Explorations locales des voisinages des particules gaussiennes par les filtres locaux (FKE) conditionnels à leurs positions respectives et selon le modèle prédictif.
  - Mise à jour des vraisemblances particulières.
  - Estimation à maximum de vraisemblance.

$$\hat{x}_k \simeq x_k^{i_{max}} \text{ où } i_{max} = \arg \max_{i=1,\dots,N} L_k^i$$

- La probabilité de détection, constante en l'absence de nouvelles observations, est mise à jour à chaque récurrence de la phase d'illumination.
3. Prédiction pure selon le modèle d'une cible manœuvrante, en dehors de la phase d'illumination. Notons que, durant cette phase, l'estimée à maximum de vraisemblance ne peut être obtenue directement par la particule la plus massive à cause du fort recouvrement entre les gaussiennes élémentaires. Seules les moyenne et variance globales du support particulière sont porteuses d'informations. Elles décrivent l'évolution du domaine d'incertitude.
  4. Redistribution des particules sur le nouveau domaine d'incertitude selon la densité de probabilité obtenue à la fin de la prédiction pure et donnée par la somme pondérée des gaussiennes élémentaires.

## 5 Application au traitement radial

L'algorithme a été testé, dans des conditions sévères de rapport signal/bruit, du même ordre qu'en poursuite, pour les paramètres suivants du radar :

- porteuse nominale : 5 GHz,
- vitesse de rotation du Radar : 0.33 tour/seconde,
- récurrence radar : 0.33 ms,

- résolution distance : 30 m (impulsion élémentaire de largeur  $0.2\mu s$ ),
- durée totale d'illumination de la cible par tour d'antenne : 9 ms.

Dans le cas présenté ici, l'illumination (temps de passage du faisceau sur la cible) est composée de trois rafales de 9 impulsions chacune. Chaque rafale dure 3 ms. Les rafales sont incohérentes entre elles, avec diversité de fréquence, nécessitant une ré-acquisition de la phase.

Les exemples présentés ont été réalisés pour des rapports S/B de  $-7$  dB et  $-3$  dB, avec des aléas d'accélération de  $\pm 4g$  par seconde en moyenne, une incertitude initiale de  $1500m$  sur la distance et de  $300m/s$  sur la vitesse.

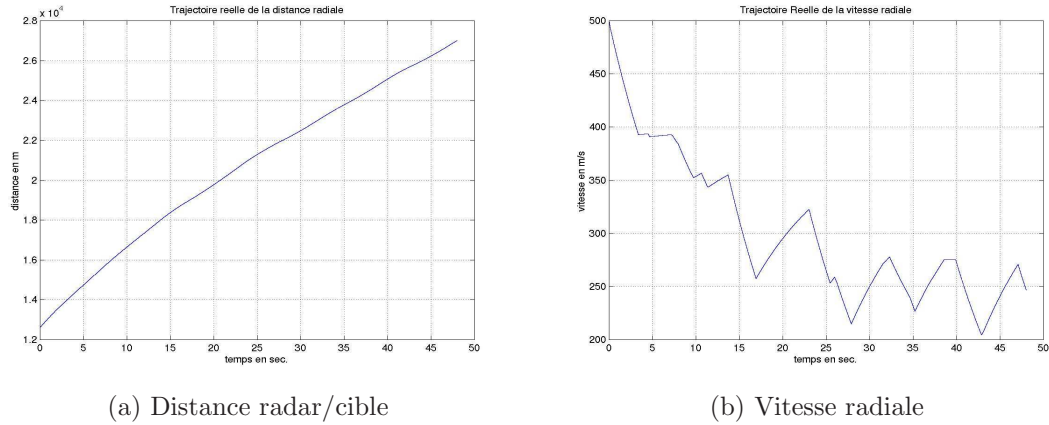


FIG. II.5.1 – Trajectoire réelle de la cible ( $|\delta \gamma| \leq 4g$ , par seconde)

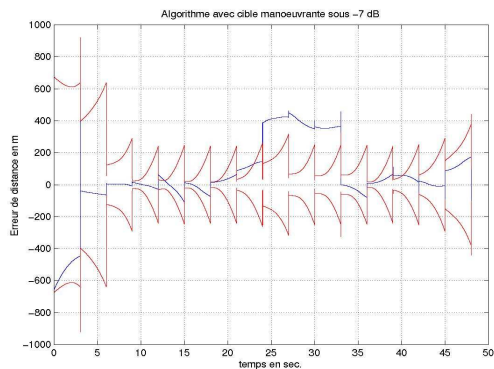
Malgré une forte dynamique de la cible (figure II.5.1), le récepteur particulière garantit la tenue en accrochage jusqu'à  $-7$  dB de S/B. Notons par ailleurs, les bonnes performances en terme de **probabilités de détection et de fausse alarme** (dès la 4<sup>ème</sup> illumination sous  $-7$  dB). Ces deux paramètres, plus significatifs que la précision pour le radar de veille (dont l'objectif principal est la détection), témoignent des bénéfices de l'optimalité globale du récepteur, et non plus pour chaque illumination isolément.

### 5-1 Performances sous $-7$ dB

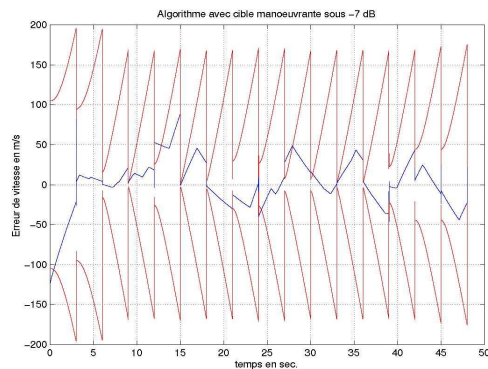
La figure (II.5.2) présente les performances du filtre particulière sous  $-7$  dB. L'intégration cohérente sur 4 tours d'antenne successifs permet au filtre de réhausser le rapport S/B, permettant ainsi la détection de la cible là où les techniques classiques (intégrant sur un unique tour d'antenne dans les cas les plus favorables) auraient échouées.

Les performances de l'estimation de la distance et de la vitesse radiale (figure (II.5.2) : (a) et (b)) sont représentées par l'erreur d'estimation réelle (bleu) et les entonnoires de confiance à 2 écarts-types autour des estimées (rouge). L'entonnoire de confiance traduit les capacités en prédiction jusqu'à 3 s du filtre particulière, entre deux illuminations successives.

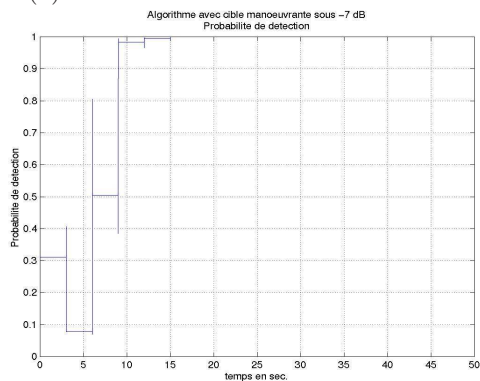




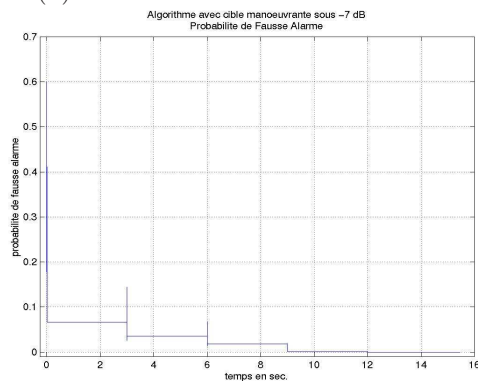
(a) Erreur d'estimation de la distance



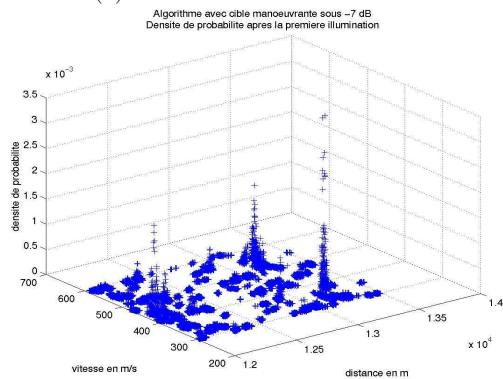
(b) Erreur d'estimation de la vitesse



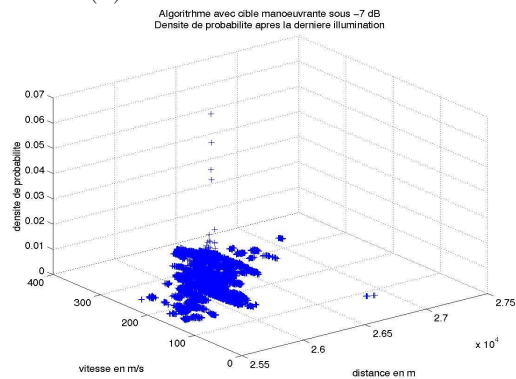
(c) Probabilité de détection



(d) Probabilité de fausse alarme



(e) Répartition des particules après la première illumination



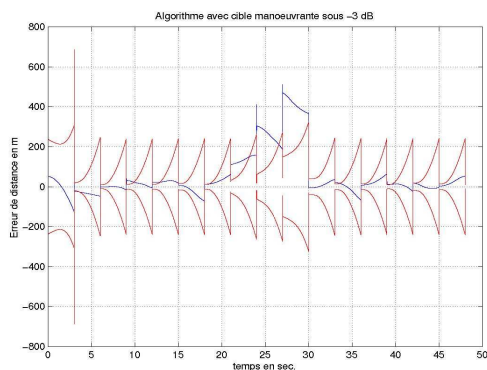
(f) Répartition des particules après la dernière illumination

FIG. II.5.2 – Performances du récepteur particulière de veille-poursuite sous S/B de -7 dB

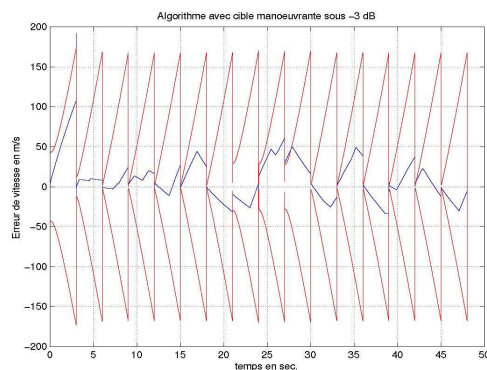
L'évaluation du comportement des fausses alarmes du récepteur est simulé ici par le traitement d'un signal ne contenant que du bruit de mesure. La probabilité de fausse alarme est négligeable après l'intégration des 4 tours.

## 5-2 Performances sous $-3\text{ dB}$

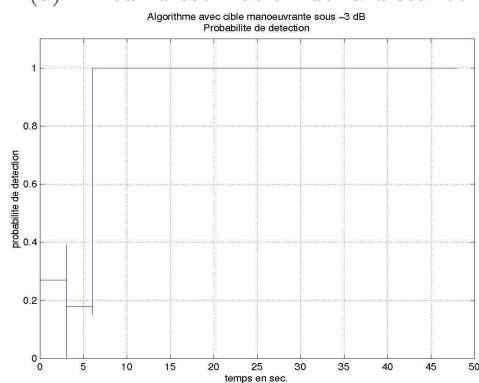
Les figures (II.5.3, II.5.4) présentent les performances du filtre particulaire sous  $-3\text{ dB}$ . L'augmentation de l'observabilité ( $+4\text{ dB}$ ) par rapport au cas précédent se traduit par une détection plus rapide (2 tours d'antenne) et une dégradation moindre des précisions entre 25 et 30 s. Les performances en prédiction sont pratiquement équivalentes, l'élargissement du domaine d'incertitude prédictif de la dynamique étant insensible à la variation du RSB. L'optimalité du filtre permet d'utiliser cette incertitude réduite avant l'illumination de la cible, au lieu de la ré-initialisation (classiquement) sur tout le domaine.



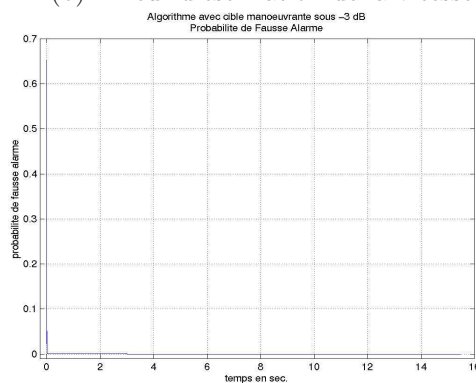
(a) Erreur d'estimation de la distance



(b) Erreur d'estimation de la vitesse

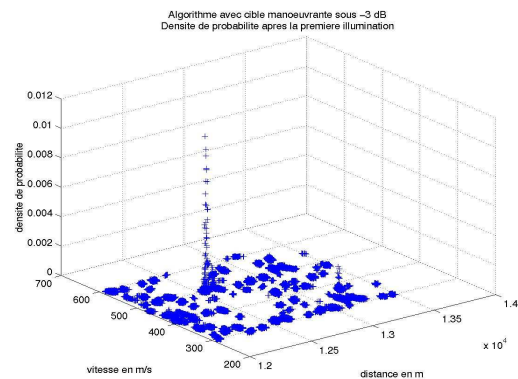


(c) Probabilité de détection

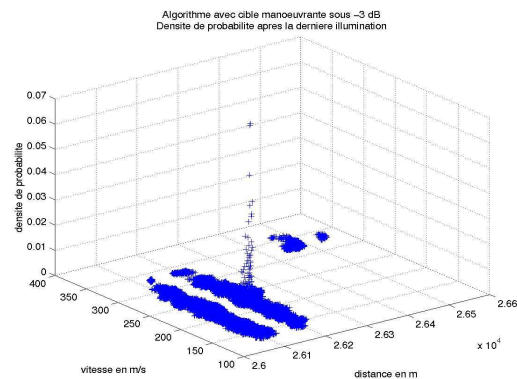


(d) Probabilité de fausse alarme

FIG. II.5.3 – Performances du récepteur particulaire sous S/B de  $-3\text{ dB}$



(e) Répartition des particules  
après la première illumination



(f) Répartition des particules  
après la dernière illumination

FIG. II.5.4 – Performances du récepteur particulaire sous S/B de -3 dB

## 6 Conclusion

Les performances numériques en simulation présentées ici ont permis de mesurer les capacités d'amélioration de la veille-poursuite radar qu'offre la technique particulaire. Ces résultats appellent à compléter cette étude, notamment par :

- la prise en compte optimale de la mesure angulaire : appartenance à un secteur angulaire et échange de probabilité entre secteurs voisins,
- l'utilisation de critères de sélection marginaux, mieux appropriés pour la veille,
- la validation des performances sur données réelles.

Une collaboration avec Thalès Air Défense, en marge de l'étude pour les radars de poursuite et concernant ces différents points, vient d'être contractée. Les conclusions de cette étude sont prévues pour l'année en cours.

## Chapitre 6

# Conclusion de la deuxième partie

L'aptitude de la méthode particulière à traiter des problèmes non-linéaires non-gaussiens a permis une prise en compte efficace des conditions critiques de dynamiques et d'observations dans le traitement optimal des informations radar. Ceci s'est traduit par des améliorations considérables des performances :

- Un seuil de détection pouvant être de 20  $dB$  inférieur à celui des techniques classiques.
- Une probabilité de fausse alarme plus faible.
- Des meilleures précisions des paramètres estimés sous forte dynamique et faible rapport signal/bruit.
- Une levée automatique de l'ambiguïté de vitesse grâce à l'estimation conjointe de l'effet Doppler et du défilement de l'enveloppe.

Ces gains de performances ont pu être montrés à travers :

- les résultats obtenus par des simulations réalistes en veille et en poursuite radar,
- le retraitement des enregistrements de données réelles issus de la campagne aléatoire [Noyer 00], et la comparaison aléatoire/déterministe.

La baisse significative du nombre total de particules permise par l'exploration déterministe, mise en évidence par la comparaisons sur les données J11B des deux méthodes, permet d'envisager une application plausible des techniques particulières à l'échelle industrielle.

Les excellents résultats obtenus par les évaluations réalistes et réelles de la méthode proposée ont donné lieu à de nouvelles études contractuelles. Ces études, dont l'objectif final d'aboutir à une réalisation effective ne cesse d'approcher, concernent :

- l'évaluation des performances du récepteur particulière de poursuite sur des mesures réelles du radar ARMOR,
- l'étude et l'évaluation sur données réelles de la veille-poursuite radar à particules déterministes de Gauss.



Troisième partie

# Réception particulière du signal GPS



# Chapitre 1

## Introduction

Le système GPS(Global Positionning System) est un système de positionnement par satellite. Sa disponibilité spatiale et temporelle ont en fait le système de positionnement par excellence. En effet, initialement conçu pour des applications militaires, ce système a très vite été adopté dans d'autres domaines comme l'aéronautique et l'espace civils, la topographie ou la météorologie.

Sous des conditions favorables de dynamique et d'observation, le traitement classique du signal GPS permet d'atteindre des hautes précisions de positionnement : de l'ordre de 5 *m*. Cependant, ses performances sont très vite dégradées notamment en présence de fortes perturbations dynamiques. Habituellement, les solutions proposées pour traiter ce problème se basent sur l'intégration des mesures GPS avec d'autres sources de mesures (centrale inertielle,...). Si de telles intégrations permettent de nettes améliorations des performances globales, elles sont, en revanche, préjudiciables à l'autonomie du système GPS, qui fût, pourtant, l'une de ses premières motivations.

**La réception optimale autonome du signal GPS en présence de fortes dynamiques**, nécessite une estimation non-linéaire conjointe des mesures utiles et des sources de perturbations qui les affectent. Une telle estimation est possible par les techniques particulières, dont l'application ne souffre d'aucune restriction particulière.

L'étude du problème GPS (chapitre 2) met en évidence deux modes de fonctionnement possibles selon les informations disponibles a priori et les chaînes de prétraitement utilisées. Elle permet de proposer **une modélisation complète** pour chaque mode, ainsi que les solutions particulières adaptées.

Les **récepteurs particuliers déterministes** proposés sont ici évalués sur des données obtenues par des simulations réalistes. Leurs performances sont illustrées aux chapitres 3 et 4.





## Chapitre 2

# Problématique GPS : Introduction et modélisation

### 1 Introduction

Basé sur la réception des signaux émis par une constellation de satellite, le positionnement GPS est obtenu par triangulation à partir des mesures des distances relatives entre le récepteur et les satellites visibles. Les performances atteignables dépendent de la géométrie de l'observation des satellites et de la précision des mesures de distance.

A faible RSB, l'extraction efficace de l'information distance nécessite une réception optimale du signal GPS prenant en compte une modélisation fine du système d'état associé.

### 2 Description du système GPS

Le système GPS (segment spatial) comporte 24 satellites actifs en orbite autour de la terre. Il permet la détermination de la position en trois dimensions ainsi que la correction de l'horloge du récepteur. Plusieurs systèmes de numérotation permettent d'identifier les satellites. Le numéro PRN (pseudo Random Noise) est le plus couramment utilisé. Contenu dans le message de navigation, ce numéro représente le code pseudo-aléatoire émis par le satellite.

Les satellites sont répartis sur six orbites de façon à ce qu'à n'importe quelle heure un minimum de cinq satellites soit visible de tout endroit sur terre. Chacun de ces satellites transmet un signal contenant la position et le temps du satellite nécessaire pour le positionnement du récepteur [Johansson 98]. La détermination de la position et la correction de l'horloge se font à partir des pseudo-distances séparant le récepteur GPS et quatre satellites visibles. La pseudo-distance entre un récepteur et un satellite est obtenue à partir du délai de transmission du signal entre les deux. Le préfixe pseudo est dû au caractère temporel ainsi qu'au biais induit par l'erreur de l'horloge du récepteur.

Selon la précision accessible on distingue deux types de services fournis par le systèmes GPS :

- le SPS ( Standard Positionning Service) disponible à tout les utilisateurs,
- le PPS (Precision Posionning Service) réservé au gouvernement américain et aux utilisateurs militaires.

## 3 Signal GPS

### 3-1 Signal émis

Les satellites GPS émettent deux porteuses dans la bande L :

- $L_1$  à 1575.42 MHz,
- $L_2$  à 1227.60 MHz,

Ces porteuses sont modulées en phase par :

- **Un message de navigation**, qui comporte un ensemble d'informations nécessaires au positionnement tels que : les éphémérides du satellite, les coefficients du modèle ionosphérique, l'état du satellite et les paramètres d'horloge.
- **les codes pseudo-aléatoires** :
  - Le code C/A (Coarse Acquisition Code) sur  $L_1$ . Accessibles à tout les utilisateurs, ce code définit le service SPS.
  - Le code P (Precision Code) sur  $L_1$  et  $L_2$ . Reservé à l'armée américaine et certains utilisateurs autorisés, l'accès à ce code est protégé par des clés de protection AS (Anti-Spoofing). Il définit le service PPS.

La transmission utilisée dans le GPS est une transmission à spectre étalé (SS : Spread Spectrum) du type BPSK DSSS (Binary Phase Keying Shift Direct Sequence Spread Spectrum). Cela signifie que la sélection s'effectue par corrélation d'une séquence pseudo-aléatoire qui module la porteuse en superposition à la modulation utile par le message de navigation. En BPSK, la phase de la porteuse tourne de  $180^\circ$  à chaque transition du signal modulant. Le terme DS (Direct Sequence) signifie que l'étalement du spectre est réalisé par une modulation de phase de la porteuse.

La modulation par le code est beaucoup plus rapide que la modulation des données. Le rapport de modulation a pour effet d'élargir le spectre de l'émission et de réduire la densité de puissance émise dans la même proportion. Pour le code C/A, le rapport d'étalement de spectre est donné par :

$$\frac{B}{b} = \frac{1.023 \cdot 10^6}{50} = 2 \cdot 10^4$$

avec,  $B$  fréquence de modulation du code C/A et  $b$  celle des données.

La porteuse ainsi étalée par la modulation du code pseudo-aléatoire présente toutes les caractéristiques d'un bruit. Le désétalement par le code du signal reçu permet :

- de restituer le signal utile dans sa bande étroite  $b$ ,
- d'étaler les signaux parasites, en rejetant la majeure partie de leur énergie en dehors de la bande utile.

La réjection du bruit est du même ordre de grandeur que le rapport d'étalement du spectre. Elle est d'autant plus efficace que la séquence du code pseudo aléatoire est longue.

L'étalement du spectre permet à plusieurs émissions de codes pseudo-aléatoires différents de cohabiter sur la même fréquence sans interférence entre les signaux. Chaque émission considère toutes les autres comme des bruits qu'elle rejette dans le rapport  $B/b$ .

Tous les signaux GPS transmis sont cohérents. Cela signifie que les transitions du message de navigation correspondent aux éventuelles transitions des codes P et C/A.

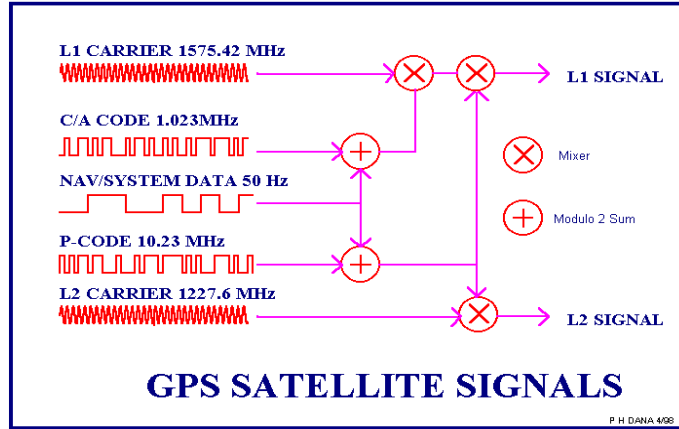


FIG. III.2.1 – Signal GPS

### 3-1-1 Codes pseudo-aléatoires

Les séquences pseudo-aléatoires, souvent utilisées dans les systèmes de télécommunications à spectre étalé, sont générées par des registres à décalage rebouclés sur eux-mêmes. Le système GPS utilise les codes de GOLD de longueurs maximales.

Il représente une bonne approximation d'une séquence aléatoire, dont la fonction d'autocorrélation est donnée par :

$$\begin{aligned}
 R(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T c(t)c(t-\tau)dt \\
 &= \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T_c} & \text{si } |\tau| \leq T_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

avec  $\tau$  valeur du retard et  $T_c$  durée du chip (bit du code) élémentaire.

Un registre de  $n$  éléments permet de générer une séquence pseudo aléatoire de longueur  $N = 2^n - 1$ , dont la fonction d'autocorrélation est donnée par :

$$R(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T_c} \left( \frac{1}{N} + 1 \right) & \text{si } |\tau| \leq T_c \\ -\frac{1}{N} & \text{si } T_c \leq |\tau| \leq (N-1)T_c \end{cases}$$

### 3-1-2 Message de navigation

Le message de navigation est une suite de données binaires transmises en mode série à 50 *bits/s* sur les deux porteuses.

La structure du message est en trames de 1500 bits composées de cinq sous-trames contenant chacune 300 bits. Chaque sous-trame contient 10 mots de 30 bits. L'émission complète d'un message de données nécessite l'émission de vingt-cinq trames et dure 12.5 minutes.

### 3-1-3 Composantes du signal émis

Toutes les composantes du signal GPS sont cohérentes et générées à partir de la même fréquence fondamentale  $F = 10.23 \text{ MHz}$  issue d'un oscillateur pilote à très haute stabilité.

Le signal complet émis par l'antenne du satellite est donné par :

$$s(t) = A_c C(t) D(t) \sin(2\pi f_1 t + \phi_c) + A_p P(t) D(t) \cos(2\pi f_1 t + \phi_p) + A_p P(t) D(t) \sin(2\pi f_2 t + \phi_p)$$

où  $C(t)$ ,  $P(t)$  et  $D(t)$  représentent respectivement les séquences du code C/A, du code P et du message de navigation.  $f_1$  et  $f_2$  sont les fréquences respectives des porteuses  $L_1$  et  $L_2$ .

Les combinaisons des codes pseudo-aléatoires et des données sont des additions modulo 2 telles que :

$$\begin{aligned} C(t)D(t) &= 1 && \text{si } C(t) = D(t) \\ C(t)D(t) &= -1 && \text{si } C(t) \neq D(t) \end{aligned}$$

### 3-2 Signal reçu sur l'antenne du récepteur

Le signal GPS subit, pendant sa transmission, une atténuation d'espace libre et un retard proportionnel à la distance  $R_t$  séparant le récepteur du satellite.

Le signal à l'entrée de l'antenne du récepteur est alors donné par :

$$y(t) = \frac{1}{R_t} s(t - \tau) + b_t$$

avec  $\tau = R_t/c$  retard de transmission de l'onde électromagnétique et  $b_t$  bruit de mesure blanc gaussien.

Pour la réception SPS du signal GPS  $L_1$ , monosatellite, monotrajét, le signal utile s'écrit :

$$y(t) = \frac{A_t}{R_t} C(t - R_t/c) D(t - R_t/c) \sin(2\pi f_1 (t - R_t/c) + \phi_t) + b_t$$

Le déphasage  $\Delta\phi_t = 2\pi f_1 R_t/c$  de la porteuse est fonction du temps. Lorsque la vitesse relative du récepteur/satellite  $v$  est constante, ce terme se réécrit, sous forme d'une fréquence Doppler  $f_D = f_1 v/c$ ,

$$\Delta\phi_t = 2\pi f_D t$$

D'autres effets dûs :

- au milieu traversé (erreurs ionosphériques et troposphériques),
- à l'environnement du récepteur (Multi-trajet),
- à la dynamique des satellites (erreurs relativistes d'horloge).

viennent s'ajouter aux effets pris en compte par l'équation de mesure ci-dessus. Ces effets, à l'exception des multitrajets, sont réductibles par corrections à partir des données transmises par les satellites. Concernant les multitrajets, leur influence est souvent diminuée par le choix d'antennes de diagrammes convenables. Tous ces effets ne seront pas pris en compte dans le cadre de la présente étude qui ne concerne que l'estimation des paramètres du signal mono-fréquence, mono-trajet, monosatellite.

### 3-3 Pré-traitement analogique du signal GPS

Le signal GPS reçu est d'abord pré-amplifié puis démodulé. La démodulation est souvent réalisée en plusieurs étapes. D'abord, le signal est transformé dans une fréquence intermédiaire (IF) (dépend du récepteur e.g. 4 MHz) :

$$y(t) = \frac{A_t}{R_t} C(t - R_t/c) D(t - R_t/c) \sin(2\pi f_{IF} t - 2\pi f_1 R_t/c + \phi_t) + \beta_t$$

Le signal IF est ensuite démodulé dans la bande de base ( $B$ ) en deux composantes en I et Q (I : composante en phase, Q : composante en quadrature de phase). Le signal GPS à la sortie du démodulateur s'écrit sous la forme complexe :

$$y(t) = \frac{A_t}{R_t} C(t - R_t/c) D(t - R_t/c) e^{-2\pi f_1 R_t/c + \phi_t} + \beta_t$$

La bande du signal ainsi démodulé correspond à la bande de base du code PRN augmentée du Doppler résiduel  $f_D(t)$ .

La démodulation en bande de base peut être réalisée avant ou après l'échantillonnage du signal.

### 3-4 Bilan de puissance

Le rapport signal/bruit nominal à la sortie du démodulateur est donné par :

$$S/N = P_S - P_B = -22.1 \text{ dB}$$

avec

- $P_S = -162 \text{ dBW}$  puissance minimale du signal reçu après atténuation d'espace libre et atténuation atmosphérique.
- $P_B = -139.9 \text{ dBW}$

Soit, après désétalement du spectre, c'est à dire filtrage adapté au code :

$$S/N = 21 \text{ dB}$$

Il s'agit d'un rapport signal/bruit nominal qui peut varier de  $\pm 10 \text{ dB}$  selon l'élévation du satellite, son état et le gain d'antenne du récepteur.

## 4 Mesures GPS

La position du récepteur est déduite, par triangulation, des distances séparant son antenne des satellites observés. Ces distances sont proportionnelles aux temps de propagation  $\tau$  du signal, qui se traduisent dans le signal reçu par :

- Un décalage du code PRN  $C(t - \tau)$ ,
- Un déphasage de la porteuse  $e^{-2\pi f_1 \tau}$

donnant lieu aux deux mesures possibles en GPS :

- la mesure de la pseudo-distance,
- la mesure de phase

## 4-1 Mesure de pseudo-distance

Cette mesure se fait à l'aide du code pseudo-aléatoire émis par le satellite. La corrélation entre le signal reçu et une réplique localement générée du code C/A permet de mesurer le décalage  $\tau$  entre les instants d'émission et de réception du signal.

Elle contient un terme inconnu dû au décalage entre les horloges du satellite et du récepteur :

$$\rho = R + c\Delta t$$

avec,  $\rho$  pseudo-distance satellite-récepteur,  $R$  distance réelle et  $\Delta t$  décalage d'horloge commun à tous les satellites observés par le récepteur.

La mesure de pseudo-distance est relativement peu précise (plusieurs mètres). Cependant, elle ne souffre pas d'ambiguïté à l'intérieur d'une séquence de code C/A (à 300 km près).

## 4-2 Mesure de phase

La mesure de phase se fait sur les porteuses  $L_1$  et  $L_2$ , de longueurs d'onde respectives de 19 et 24.4 cm. C'est une mesure de temps plus précise que la pseudo-distance (quelques millimètres). Son inconvénient est son ambiguïté égale à la longueur d'onde. Elle ne permet donc qu'une mesure de la variation de la distance satellite-récepteur entre deux instants de mesure, en l'absence d'interruption du signal.

La mesure de phase est basée sur la comparaison de la phase du signal reçu par le récepteur et celle d'une réplique localement générée. Le récepteur mesure le déphasage  $\Delta\phi$  entre les deux signaux et entretient à l'aide d'un compteur le nombre  $n$  de cycles reçus depuis la première mesure à l'instant  $t_0$ , tant que la réception n'est pas interrompue.

Comme pour le cas de la pseudo-distance, le décalage entre l'horloge du satellite et celle du récepteur se traduit par un terme inconnu commun à toutes les mesures faites sur les différents satellites observés.

La mesure de phase est donnée par :

$$\Delta\phi + n = f\Delta t + \frac{f}{c}R - N_{t_0}$$

avec  $f$  fréquence de la porteuse,  $n$  nombre entier de cycles compté depuis  $t_0$ ,  $R$  distance satellite-récepteur et  $N_{t_0}$  nombre entier inconnu de cycles à la première mesure.

## 4-3 Combinaison des Mesures

La combinaison des mesures GPS permet de s'affranchir partiellement des inconvénients de chacune d'elles.

### 4-3-1 Combinaison des phases

Il s'agit d'une combinaison linéaire des phases des deux porteuses  $L_1$  et  $L_2$  :

$$\Phi = m_1\phi_1 + m_2\phi_2$$

avec  $m_1 = 1$  et  $m_2 = -1$ .

Ceci permet de créer une longueur d'onde équivalente :

$$\lambda = 82.2 \text{ cm}$$

et d'agrandir le domaine d'ambiguïté de phase, facilitant ainsi l'estimation des ambiguïtés entières.

#### 4-3-2 Combinaison de pseudo-distance et de phase

Les mesures de code et de phase subissent le même effet Doppler aux écarts ionosphériques et troposphériques près. Il est donc possible de filtrer les écarts code/phase et de restituer ainsi une pseudo-distance non-ambigue lissée par la phase, donc, de meilleures précisions.

## 5 Traitement numérique classique du signal GPS

Après démodulation, le traitement du signal GPS peut être divisé en trois étapes :

- acquisition du signal,
- poursuite et affinage des mesures,
- lecture et synchronisation du message de navigation.

### 5-1 Acquisition du signal

L'acquisition du signal GPS est une recherche tridimensionnelle dans le temps (retard), la fréquence et le code d'accès du satellite.

#### 5-1-1 Recherche linéaire

Il s'agit d'une recherche exhaustive des domaines temporel et fréquentiel discrétisés avec des pas respectifs de 0.5 période d'un chip et de 500 Hz. Pour chaque hypothèse, le récepteur calcule la moyenne de  $K$  échantillons de la corrélation du signal reçu et d'une réplique retardée et modulée du code C/A. La recherche s'arrête lorsque cette moyenne dépasse un seuil donné.

#### 5-1-2 Recherche par TFR

Cette méthode est basée sur le même principe que la recherche linéaire. Le code C/A subit cette fois un décalage circulaire, ce qui ramène la corrélation à une convolution circulaire pouvant être calculée sous forme d'un simple produit dans le domaine fréquentiel. Bien que nettement plus rapide que la première, elle est moins utilisée à cause de sa mise en œuvre plus compliquée.

### 5-2 Poursuite du signal

La poursuite permet d'éviter la perte du signal (après acquisition) pouvant être causée par les variations dans le temps de ses paramètres. La poursuite du retard est réalisée par une boucle de verrouillage de code (DLL : Delayed Lock Loop) et celle de la fréquence par une boucle de verrouillage de la porteuse (PLL : Phase Lock Loop ou FLL : Frequency Lock Loop). Des versions de ces boucles de verrouillage utilisant des filtres de Kalman ont été proposées dans la littérature [Psiaki 01].



### 5-2-1 Boucle de verrouillage de code (DLL)

La poursuite du code PRN est réalisée par une boucle d'asservissement, où l'erreur de synchronisation, entre le code C/A reçu et sa réplique générée par le récepteur, est calculée par la différence entre les résultats de corrélation pour différentes valeurs du retard au voisinage de son estimation courante.

La boucle de verrouillage de code utilise généralement trois corrélateurs distincts, alimentés par le signal reçu :

- Early : Avancé par rapport au retards présumé d'une fraction de chip. Il fournit les deux composantes en phase et en quadrature de phase :  $I_E$  et  $Q_E$ ,
- Prompt : correspond au retard présumé. Il fournit les deux composantes  $I_P$  et  $Q_P$ ,
- Late : retardé par rapport au retards présumé d'une fraction de chip. Il fournit les deux composantes  $I_L$  et  $Q_L$ .

Le signal d'erreur est donné par la différence entre les corrélations Early et Late. Filtré, il sert de commande au générateur de code pour corriger l'erreur de synchronisation du code. Trois signaux d'erreurs sont couramment utilisés par les récepteurs GPS [Braasch 99] :

- Cohérent :

$$\epsilon = (I_E - I_L) \text{sign}(I_P)$$

où  $\text{sign}(I_P)$  représente le signe de  $I_P$ , il correspond à celui du bit de données du message de navigation.

- Différence des puissances des signaux Early et Late :

$$\epsilon = (I_E^2 + Q_E^2) - (I_L^2 + Q_L^2)$$

- Produit scalaire :

$$\epsilon = (I_E - I_L)I_P + (Q_E - Q_L)Q_P$$

L'intégration du signal d'erreur sur une période suffisamment longue du temps permet d'éviter les fausses corrections dues au bruit de mesure.

### 5-2-2 Boucles de verrouillage de la porteuse (PLL/FLL)

Après l'acquisition, la fréquence est obtenue avec une précision de  $\pm 500$  Hz. Les boucles de verrouillage de la porteuse permettent d'améliorer cette précision et de corriger la fréquence en cas de variation. Elles sont basées sur le traitement des composantes  $I_P$  et  $Q_P$  du corrélateur synchronisé sur le code PRN et délivrent un signal de commande de l'oscillateur local (NCO : Numerically Controlled Oscillator), ainsi que le bit courant du message de navigation.

#### 5-2-2.1 Boucle de verrouillage de phase

La PLL cherche à maximiser la composante en phase du signal reçu après démodulation et désétalement par le code d'accès. Les signaux d'erreur les plus communément utilisés sont [Kaplan 96] :

- $\epsilon = \text{sign}(I_P)Q_P = \sin(\Delta\phi)$ ,
- $\epsilon = I_PQ_P = \sin(2\Delta\phi)$ ,
- $\epsilon = Q_P/I_P = \tan(\Delta\phi)$ .

Les bits du message de navigation modulant la porteuse ont pour effet d'inverser régulièrement le signe du signal. La boucle de verrouillage de phase utilisée en GPS est une boucle de Costas.

Insensible à un déphasage de  $\pm\pi$ , elle permet de récupérer les bits de données à un signe près conjointement à la correction de la phase. En l'absence de décrochage de phase, l'inversion de signe est commune à tous les bits de données récupérés et peut être corrigée, par comparaison au préambule contenu dans le message de navigation, pendant la phase de synchronisation des trames.

La boucle de Costas utilise une intégration des signaux  $I_P$  et  $Q_P$  pour réhausser le rapport signal/bruit. La longueur de cette intégration doit être inférieure à la durée des bits de données (20 ms). De plus, la synchronisation de cette intégration avec les instants de transition des données de navigation est nécessaire pour éviter d'intégrer des signaux reçus avec deux bits de données différents.

### 5-2-2.2 Boucle de verrouillage de fréquence

La boucle de verrouillage de phase permet une poursuite précise de la fréquence du signal reçu. Cependant, contrainte par la synchronisation parfaite des bits de données, elle ne peut être utilisée efficacement dès les premières itérations, lorsque les instants de transitions des bits sont encore inconnus. Durant cette période, les récepteurs GPS utilisent des boucles de verrouillages de fréquence, moins sensibles à la synchronisation des bits du message de navigation. La boucle de verrouillage de fréquence utilise la différence des signaux  $I_P$  et  $Q_P$  pour deux périodes d'intégration successives débutant aux instants  $t_1$  et  $t_2$  (avec  $t_2 - t_1$  durée d'intégration des signaux reçus) :  $I_{P_1}$ ,  $Q_{P_1}$  et  $I_{P_2}$ ,  $Q_{P_2}$ , pour former un signal d'erreur permettant une fois filtré de corriger la fréquence de l'oscillateur local.

Les signaux d'erreurs les plus communément utilisés sont basés sur le calcul des quantités suivantes :

- Produit scalaire :  $\alpha = I_{P_1} I_{P_2} + Q_{P_1} Q_{P_2}$ ,
- Déterminant de la matrice  $\begin{bmatrix} I_{P_1} & I_{P_2} \\ Q_{P_1} & Q_{P_2} \end{bmatrix}$  :  $\beta = I_{P_1} Q_{P_2} - I_{P_2} Q_{P_1}$ ,

Ils sont donnés par [Kaplan 96] :

$$\begin{aligned} - \epsilon &= \frac{\text{sign}(\alpha)\beta}{t_2 - t_1} = \frac{\sin(2\Delta\phi)}{t_2 - t_1}, \\ - \epsilon &= \frac{\beta}{t_2 - t_1} = \frac{\sin(\Delta\phi)}{t_2 - t_1}, \\ - \epsilon &= \frac{\text{atan2}(\alpha, \beta)}{2\pi(t_2 - t_1)} = \frac{\Delta\phi}{2\pi(t_2 - t_1)}. \end{aligned}$$

La boucle FLL permet aussi de détecter les bits du message de navigation émis par le satellite. La probabilité d'erreur par bits de données est plus importante que dans une boucle de Costas.

## 5-3 Synchronisation des bits de données

Chaque bit de donnée transmis dans le signal GPS est répété 20 fois. La détermination des instants de changement de bit permet, d'une part, de lire le message satellite nécessaire au positionnement du récepteur, et d'autre part, de profiter amplement de la durée d'intégration de 20 ms que permet cette répétition pour améliorer les performances des boucles de poursuite du signal.

Les éphémérides des satellites observés et les informations a priori sur la position du récepteur et sur le décalage de son horloge permettent une synchronisation "grossière"<sup>1</sup> des bits de données.

<sup>1</sup>fonction des incertitudes a priori sur les informations nécessaires au calcul

Dans le cas de fortes incertitudes, les récepteurs GPS utilisent des procédures statistiques de synchronisation pour la détection des instants de transition à partir du signal reçu. L'approche la plus utilisée, histogram approach [Parkinson 96], est basée sur le comptage du nombre de changement de signe à la sortie du corrélateur prompt ( $I_P$ ) pour chacune des positions candidates ( $t_{transition} \in \{0, \dots, 19\}$ ). L'estimée de l'instant de transition est donnée par la position ayant le plus grand nombre de changements de signe. La qualité de l'estimation dépend du temps d'intégration, elle se traduit par une grande différence entre le nombre de changements de signe de la position la plus massive et ceux des autres positions candidates.

[Kokkonen 02] propose une approche à maximum de vraisemblance pour la synchronisation des bits de données. Pour chaque position candidate  $t_{transition}$ , l'algorithme de synchronisation proposé calcule la vraisemblance conditionnelle aux observations correspondantes. L'estimée à maximum de vraisemblance  $\hat{t}_{transition}$  est donnée par la position la plus massive, et la qualité de l'estimée, fonction de l'horizon temporel, par la clarté du pic de vraisemblance.

## 6 Solutions particulières

Les performances du traitement classique du signal GPS sont restreintes aux cas les plus réguliers de dynamique et d'observabilité. En effet, le traitement optimal du signal GPS, notamment sous des conditions critiques, nécessite une estimation conjointe des paramètres continus et discrets du signal avec une intégration cohérente suffisamment longue pour un réhaussement maximal de l'observabilité. Un tel traitement n'est pas réalisable par les techniques classiques basées sur la séparabilité de l'estimation des différents paramètres et une hypothèse de stationnarité de l'état pendant les périodes d'intégration.

Le caractère global du filtrage particulier, ainsi que sa capacité d'intégration longue d'hypothèses multiples, en font une solution optimale pour la réception des signaux GPS sous fortes dynamiques. Son application nécessite une modélisation fine du système d'état, tant pour l'observation que pour la dynamique.

Les récepteurs particuliers, proposés ici, concernent le traitement du signal GPS échantillonné après démodulation de la porteuse :

- La première solution (Chapitre 3) reprend une architecture classique de pré-traitement du signal. Le signal à l'entrée du filtre particulier est composé de la sortie du corrélateur par le code C/A du signal GPS démodulé. Cette solution concerne un scénario de poursuite, avec, notamment, une fréquence résiduelle du signal démodulé suffisamment faible pour garantir la conservation des propriétés de la corrélation par le code.
- La seconde solution (Chapitre 4) s'affranchit de la contrainte de pré-démodulation suffisamment fine de la fréquence Doppler. En effet, l'entrée du filtre est alimentée par la sortie d'un corrélateur par le chip élémentaire de durée  $T_c$ . Le désétalement du spectre est implicitement

réalisé par le calcul des vraisemblances particulières sur une période du code C/A<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned}
 L_i &= \sum_{k=0}^{1022} (y_k - y_k^i)^T R_v^{-1} (y_k - y_k^i) + c \\
 &= \sum_{k=0}^{1022} \frac{1}{\sigma_v^2} \left( y_k^T y_k + y_k^{iT} y_k^i - 2 y_k^T y_k^i \right) + cc \\
 &= \frac{1}{\sigma_v^2} \left( \sum_{k=0}^{1022} y_k^T y_k + \sum_{k=0}^{1022} y_k^{iT} y_k^i - 2 \sum_{k=0}^{1022} y_k^T y_k^i \right) + c
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

avec  $c$  un terme de normalisation,  $R_v = \sigma_v^2 I$  matrice de covariance du bruit de mesure blanc gaussien,  $y_k$  signal reçu à la sortie du corrélateur par le chip, et  $y_k^i$  sa réplique selon l'hypothèse particulière  $i$ .

Sous l'hypothèse d'invariance de la phase Doppler durant la durée d'un chip élémentaire  $T_c = 9.77 \cdot 10^{-7} s$  ( $f_D \ll 1 MHz$ ), et de l'amplitude (atténuation  $\frac{1}{R}$  du signal comprise) durant la période du code, le calcul du dernier terme de la vraisemblance revient, après un long calcul tenant compte des instants de transitions des bits du code C/A et des bits de données,

- à la démodulation vers la fréquence résiduelle  $f_1(V_k^R - V_k^{Ri})/c$ , avec  $V_k^R$  vitesse radiale réelle et  $V_k^{Ri}$  celle de l'hypothèse particulière  $i$ ,
- au calcul de l'auto-corrélation du signal ainsi démodulé par le code C/A pour le retard  $\tau - \tau^i = \frac{R}{c} - \frac{R^i}{c}$ ,

de valeur maximale pour l'hypothèse particulière qui coïncide avec les paramètres réels du signal reçu.

Cette solution est adaptée au cas d'Acquisition/Poursuite du signal GPS, sous forte dynamique et faible observabilité.

## 7 Modélisation du problème GPS

### 7-1 Modèle d'observation

#### 7-1-1 Corrélation par le code C/A

À la sortie du corrélateur le signal s'écrit :

$$s(t) = \frac{A_t}{R_t} h(t - R_t/c) D(t - R_t/c) e^{-2\pi f_1 R_t/c + \phi_t} + \nu_t$$

où  $h(t)$  est la fonction d'auto-corrélation du code C/A donnée par :

$$h(t) \simeq \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T_c} & \text{si } |t| \leq T_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et  $\nu_t$  un bruit blanc gaussien de puissance inférieur à celle de  $\beta_t$ .

Échantillonné, le signal s'écrit :

$$s_k = \frac{A_k}{R_k} h(k \cdot T - R_k/c) D_k e^{-2\pi f_1 R_k/c + \phi_k} + \nu_k$$

---

<sup>2</sup>Cette expression est valable pour des particules ponctuelles de Dirac. Pour les particules diffuses de Dirac-Gauss, il s'y ajoute un terme fonction de l'étendue (variance) autour des composantes gaussiennes.

où  $T$  est la période d'échantillonnage égale à la durée du chip  $T_c = 9.77 \cdot 10^{-7} s$ .  
à chaque récurrence  $K$  du code C/A, le signal reçu s'écrit sous forme vectorielle :

$$Y_K = \left( \begin{array}{c} Re(s_{K T+k}) \\ Im(s_{K T+k}) \end{array} \right)_{k=0}^{1022} + V_K = \left( \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Re(s_{K T+\kappa}) \\ Im(s_{K T+\kappa}) \\ Re(s_{K T+\kappa+1}) \\ Im(s_{K T+\kappa+1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) + V_K$$

$$= \left( \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_K \cos(-2\pi f_1 R_K/c + \phi_K) \cdot (1 - \frac{R_K/c - \kappa T_c}{T_c}) \cdot D_K \\ A_K \sin(-2\pi f_1 R_K/c + \phi_K) \cdot (1 - \frac{R_K/c - \kappa T_c}{T_c}) \cdot D_K \\ A_K \cos(-2\pi f_1 R_K/c + \phi_K) \frac{R_K/c - \kappa T_c}{T_c} \cdot D_K \\ A_K \sin(-2\pi f_1 R_K/c + \phi_K) \frac{R_K/c - \kappa T_c}{T_c} \cdot D_K \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) + V_K$$

où  $V_K$  est un vecteur de bruits blancs gaussiens indépendants,  $\kappa = \lfloor \frac{R}{cT_c} \rfloor$  case distance où se trouve le récepteur à la recurrence  $K$ .

Le signal utile est contenu dans les échantillons d'indice  $\kappa$  et  $\kappa + 1$ . La réception numérique du signal GPS se fait, donc, à partir des sorties d'un nombre limité de corrélateurs distincts espacés d'une période du chip et couvrant l'espace d'incertitude sur la distance récepteur-satellite. De plus, la qualité de la corrélation par le code PRN (cf figure III.2.2) dépend de la fréquence résiduelle (vitesse de rotation de la phase du signal démodulé  $-2\pi f_1 R_K/c + \phi_K$ ). Dans le cas de fortes incertitudes sur la fréquence Doppler, la réception optimale du signal GPS nécessite autant de récepteurs que de secteurs fréquentiels élémentaires.

### 7-1-2 Corrélation par le chip

La figure III.2.2 présente l'évolution de la fonction de corrélation par le code C/A du signal reçu en fonction de la fréquence résiduelle.

Pendant la phase d'acquisition de la fréquence Doppler, le traitement optimal du signal nécessite autant de démodulateurs que de secteurs fréquentiels élémentaires ( $\sim \pm 250 Hz$ ). Pour les vitesses radiales visées par cette étude ( $\sim 1 km/s$ ), la fréquence Doppler peut atteindre les valeurs extrêmes de  $\pm 5 kHz$ , soit une dizaine de secteurs fréquentiels élémentaires. D'une part, une acquisition séquentielle de la fréquence Doppler (par exploration séquentielle des différents secteurs

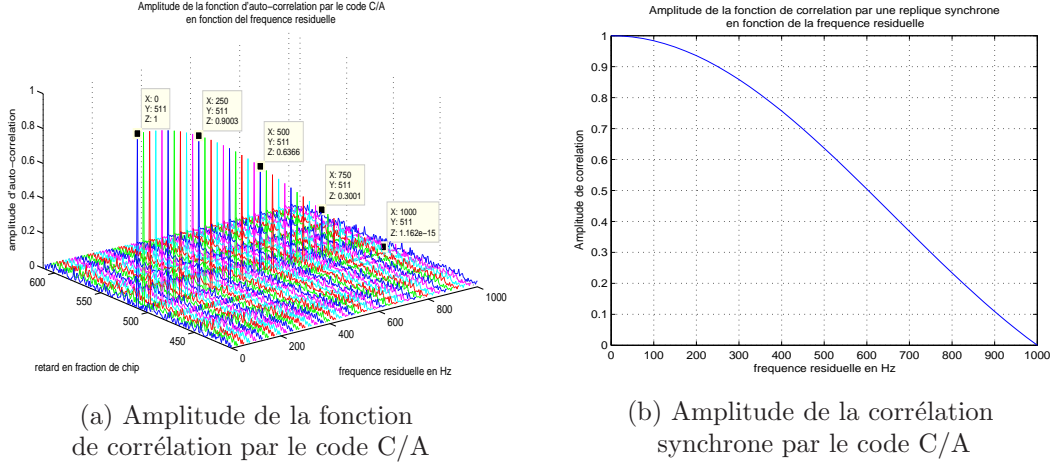


FIG. III.2.2 – Fonction de corrélation en fonction de la fréquence résiduelle.

angulaires) est sous-optimale dans le cas de fortes dynamiques (fortes variations de l'accélération relative récepteur-Satellite), et d'autre part, une exploration simultanée de toutes les hypothèses Doppler nécessite un nombre très important de corrélateurs distincts ( $\sim 10$  fois plus de corrélateurs).

La corrélation par la fonction de forme du chip élémentaire définie par :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < T_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

permet de reporter la démodulation fine du Doppler et le désétalement du spectre au traitement numérique du signal à partir de la sortie d'une unique branche démodulateur/corrélateur. Le signal à l'entrée du filtre numérique est donné par :

$$\begin{aligned} y_k &= \int_{kT_c}^{(k+1)T_c} s(t) dt \\ &= \int_{kT_c}^{(k+1)T_c} \frac{A_k}{R_t} C(t - R_t/c) D(t - R_t/c) e^{-2\pi f_1 R_t/c + \phi_t} dt \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse légitime de stationnarité des paramètres pendant la durée du chip, l'instant de transition du bits du code C/A dans l'intervalle  $[kT_c, (k+1)T_c]$  est donnée par  $t_k^{tr} = kT_c + (\frac{R_k}{cT_c} - \lfloor \frac{R_k}{cT_c} \rfloor)T_c$ . La sortie du corrélateur par le chip élémentaire s'écrit alors :

$$\begin{aligned} y_k &= \int_{kT_c}^{t_k^{tr}} \frac{A_k}{R_k} C_{k - \lfloor \frac{R_k}{cT_c} \rfloor} D_{k - \lfloor \frac{R_k}{cT_c} \rfloor} e^{-2\pi f_1 R_k/c + \phi_k} dt \\ &\quad + \int_{t_k^{tr}}^{(k+1)T_c} \frac{A_k}{R_k} C_{k+1 - \lfloor \frac{R_k}{cT_c} \rfloor} D_{k+1 - \lfloor \frac{R_k}{cT_c} \rfloor} e^{-2\pi f_1 R_k/c + \phi_k} dt \\ &= \frac{A_k}{R_k} C_{k - \lfloor \frac{R_k}{cT_c} \rfloor} D_{k - \lfloor \frac{R_k}{cT_c} \rfloor} e^{-2\pi f_1 R_k/c + \phi_k} \left( \frac{R_k}{c} - \lfloor \frac{R_k}{cT_c} \rfloor T_c \right) \\ &\quad + \frac{A_k}{R_k} C_{k+1 - \lfloor \frac{R_k}{cT_c} \rfloor} D_{k+1 - \lfloor \frac{R_k}{cT_c} \rfloor} e^{-2\pi f_1 R_k/c + \phi_k} \left( (\lfloor \frac{R_k}{cT_c} \rfloor + 1)T_c - \frac{R_k}{c} \right) \end{aligned}$$

## 7-2 Modèle de dynamique

### 7-2-1 Paramètres continus

En l'absence de multi-trajets, les paramètres continus du signal reçu sont :

- L'amplitude du signal  $A_k$  : pratiquement constante, elle est perturbée par une dérive qui peut être modélisée par un bruit blanc gaussien additif  $\delta A_k$ . Son équation d'évolution est donnée par :

$$A_{k+1} = A_k + \delta A_k$$

- Idem, la phase initiale du signal  $\phi_k$  est perturbée par une faible dérive modélisée par un bruit blanc gaussien additif  $\delta \phi_k$  :

$$\phi_{k+1} = \phi_k + \delta \phi_k$$

- La pseudo-distance  $R_k$  récepteur-satellite dont la dynamique peut être représentée, dans le cas de fortes variations, par un modèle de Singer modifié :

$$\begin{cases} R_{k+1} = R_k + v_k T \\ v_{k+1} = v_k(1 - \alpha T) + \gamma_k T \\ \gamma_{k+1} = \gamma_k + \pi_k w_k \end{cases}$$

où,  $v_k$  et  $\gamma_k$  représentent respectivement la vitesse et la consigne d'accélération radiales relatives du récepteur par rapport au satellite,  $\alpha$  coefficient de viscosité, et  $\pi_k w_k$  bruit blanc indépendant à valeur gaussienne et occurrence poissonnienne représentant les évolutions de l'accélération radiale qui peuvent être dûs autant au pilotage du récepteur qu'aux incertitudes satellitaires en phase transitoire sans lecture.

### 7-2-2 Paramètres discrets

#### 7-2-2.1 Code PRN

Dans le cas d'une corrélation par le code C/A, la connaissance de ce code n'est nécessaire qu'au niveau des corrélateurs. Le filtre numérique a, toutefois, besoin de déterminer les échantillons de mesures contenant le signal utile, et donc la case distance donnée par  $\kappa = \lfloor \frac{R}{cT_c} \rfloor$ . Conditionnellement à la distance  $R$ , la case distance  $\kappa$  est une variable déterministe :  $p(\kappa|R) = \delta(\kappa - \lfloor \frac{R}{cT_c} \rfloor)$

La réception multi-satellite nécessite évidemment plusieurs voies de réception permettant une recherche exhaustive des codes PRN de tous les satellites potentiellement visibles.

Dans le cas d'une corrélation par le chip élémentaire, cette recherche peut être réalisée par des filtres numériques parallèles conditionnels aux numéros PRN des satellites visibles et pondérées par les différentes probabilités de détection du signal relatifs aux hypothèses PRN.

Les paramètres du code PRN sont, dans ce cas,

- Le numéro PRN du satellite correspondant, donnée du problème de filtrage pour la réception mono-satellite concernée,
- Le décalage entier du code PRN  $\lfloor \frac{R}{cT_c} \rfloor$ , supposé constant pour une itération élémentaire de filtrage, il est directement calculé à partir de la pseudo-distance.

#### 7-2-2.2 Message de navigation

Le message de navigation est constitué d'une séquence de bits de durée 20 ms chacun. La modélisation la plus générale consiste, donc, à considérer ces bits indépendants et leurs valeurs

$\pm 1$  équiprobables a priori.

Les instants de transition de bits de donnée sont espacés de  $20\text{ ms}$  avec pour origine la fraction restante du bit initiale reçu au début du traitement  $t_{transition}^0 \in \{0, \dots, 19\}$ .

$$D_{K+1} = \begin{cases} u_K & \text{si } K = t_{transition}^0 \text{ modulo } 20 \\ D_K & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $u_K$  est un bruit indépendant uniforme à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ , pour  $K$  itérations en cours en période de code C/A, et  $t_{transition}^0$  premier instant de transition du premier bit reçu.

Dans le cas d'une corrélation par le chip élémentaire, la transition du bit de donnée a lieu aux instants tels que  $k = (t_{transition}^0 1023 + \lfloor \frac{R}{cT_c} \rfloor) \text{ modulo } 20460$ , en vertu de la synchronisation entre le code PRN et les bits de donnée à l'émission. Ceci permet une synchronisation plus fine, de l'ordre de  $1\text{ }\mu\text{s}$ , du message de navigation.

## 8 Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter une description détaillée du problème GPS considéré, pour deux modes de fonctionnement possibles : Poursuite et Acquisition/Poursuite, ainsi que les modèles d'état correspondant.

La distinction entre ces deux modes est due aux hypothèses d'incertitude initiale :

- Plus économe en calcul, le mode poursuite ne peut être considéré que si les informations a priori sur la vitesse radiale sont suffisamment précises.
- Le mode acquisition/poursuite est moins restrictif, il est utile pour l'accrochage initial et les reprises après perte du signal.

D'où l'intérêt de conserver cette distinction et de prévoir les conditions de commutation adéquates<sup>3</sup> entre ces modes de fonctionnement.

Les modèles associés à chacun des modes de fonctionnement présentent des fortes non-linéarités et des aléas non-gaussiens justifiant le recours à la solution particulière. Les deux stratégies d'exploration particulière : aléatoire et déterministe, sont évaluées dans ce qui suit sous les mêmes conditions opératoires. Ceci permet une comparaison équitable et une appréciation plus précise de l'économie de calcul offerte par les particules déterministes.

---

<sup>3</sup>variance de l'erreur d'estimation de la vitesse radiale.





## Chapitre 3

# Récepteur particulière en poursuite GPS

### 1 Introduction

Ce chapitre présente les récepteurs particuliers du signal GPS proposés en mode poursuite :

- Récepteur à particules *aléatoires* de Dirac-Gauss.
- Récepteur à particules *déterministes* de Dirac-Gauss.

L'objectif est, ici,

- d'une part, de montrer les performances atteignables par les méthodes particulières,
- d'autre part, d'évaluer, à performances égales, l'économie de calcul de la stratégie déterministe d'exploration proposée dans ces travaux.

Les résultats numériques présentés ont été obtenus en simulation dans des conditions aussi réalistes que possibles.

### 2 Modèle d'état

En configuration de poursuite, le signal GPS à la sortie du démodulateur est de faible fréquence résiduelle ( $\sim 100\text{ Hz}$ ). Après corrélation par le code C/A, le signal échantillonné, à la période du chip, s'écrit :

$$s_k = \frac{A_k}{R_k} h(k \cdot T - R_k/c) D_k e^{-2\pi f_1 R_k/c + \phi_k} + \nu_k$$

où  $h(\cdot)$  fonction d'autocorrélation du code C/A donnée par,

$$h(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T_c} \left(\frac{1}{N} + 1\right) & \text{si } |\tau| \leq T_c \\ -\frac{1}{N} & \text{sinon} \end{cases} \simeq \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T_c} & \text{si } |\tau| \leq T_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\nu_k$  un bruit blanc gaussien indépendant des paramètres du signal.

Les variables d'état du problème de réception du signal GPS sont :

- $A_k$  et  $\phi_k$  amplitude et phase respectives du signal reçu, de faibles dérives gaussiennes.

$$\begin{cases} A_{k+1} = A_k + \delta A_k \\ \phi_{k+1} = \phi_k + \delta \phi_k \end{cases}$$

- $R_k, v_k$  et  $\gamma_k$  paramètres cinématiques relatifs du récepteur/satellite dont l'équation dynamique est donnée par le modèle de singer modifié :

$$\begin{cases} R_{k+1} = R_k + v_k T \\ v_{k+1} = v_k(1 - \alpha T) + \gamma_k T \\ \gamma_{k+1} = \gamma_k + \pi_k w_k \end{cases}$$

- $D_k, t_{transition}$  paramètres discrets du messages de navigation :
  - $t_{transition}$  instants de synchronisation des bits de données, invariables durant toute la réception.
  - $D_k$  bit de données, de durée 20 ms, de densité de probabilité a priori équiprobable :  $p(1) = p(-1) = 1/2$ .

### 3 Solutions Particulières

La réception optimale du signal GPS, en phase de poursuite, au sens du maximum de vraisemblance trajectorielle nécessite l'estimation conjointe des paramètres continus et discrets de l'état. La solution optimale étant irréalisable en dimension finie, toute solution de complexité bornée est nécessairement sous-optimale.

Cependant, pour une capacité de calcul donnée, les techniques particulières, permettent, par leur maillage adaptatif, une approximation fiable de l'optimum, avec une précision adaptée aux ressources calculatoires et aux informations sur l'état acquises par l'intégration cohérente de multiples hypothèses élémentaires concurrentes.

#### 3-1 Discrétisation particulière de l'espace d'état

Conditionnellement au message de navigation, le modèle d'état des paramètres continus du problème GPS s'écrit :

$$\begin{cases} A_{k+1} = A_k + \delta A_k \\ \phi_{k+1} = \phi_k + \delta \phi_k \\ R_{k+1} = R_k + v_k T \\ v_{k+1} = v_k(1 - \alpha T) + \gamma_k T \\ \gamma_{k+1} = \gamma_k + \pi_k w_k \end{cases} \quad (3.1)$$

$$s_k = \frac{A_k}{R_k} h(k \cdot T - R_k/c) D_k e^{-2\pi f_1 R_k/c + \phi_k} + \nu_k \quad (3.2)$$

Les fonctions de dynamique et de mesure étant presque partout continûment dérivables, ce modèle peut être linéarisé localement dans des régions d'état de faibles étendues.

L'espace d'état des paramètres continus peut donc être discrétisé par des gaussiennes élémentaires à la finesse requise :

$$p(\theta|B_j, Y) = \sum_i \rho_i^j \mathcal{N}_{\sigma_i^j}(\theta - \hat{\theta}_i^j)$$

avec  $\theta = [A \phi R v \gamma]^T$  paramètres d'état continus et  $B_j = [t_{transition} D]^T$  paramètres discrets du message de navigation.

L'approximation de la densité de probabilité conjointe des paramètres d'état discrets et continus est alors donnée par :

$$p(\theta, B|Y) = \sum_j \rho_j \delta_{B_j}(B) p(\theta|B_j, Y) = \sum_n \rho_n \mathcal{N}_{\sigma_n}(\theta - \hat{\theta}_n) \delta_{B_n}(B)$$

Elle correspond à la discrétisation par des particules de Dirac-Gauss de l'espace d'état conjoint, soit un maillage ponctuel de l'espace selon les paramètres  $B$  du message de navigation et diffus selon les paramètres électromagnétiques et cinématiques.

### 3-2 Récepteur à particules aléatoires de Dirac-Gauss

L'évolution du maillage particulaire de Dirac-Gauss peut être assurée par une exploration aléatoire de l'espace d'état.

L'algorithme de la solution à particules aléatoires de Dirac-Gauss est alors donné par :

#### 1. Initialisation :

Chacune des mesures de Dirac-Gauss est affectée d'une variance garantissant la validité de la linéarisation locale du système d'état. Le support initial, caractérisé par l'ensemble des positions et covariances des particules élémentaire  $(B_0^i, \theta_0^i, P_0^i)$ , est distribué selon les connaissances a priori de l'état. Il doit vérifier trois points :

- garantir le validité de la linéarisation locale,
- approcher au mieux la densité de probabilité a priori,
- assurer une bonne couverture du domaine d'incertitude initial.

Elle est réalisée par un tirage des positions particulières.

En pratique, toutes les particules sont affectées de la même covariance initiale.

#### 2. Exploration aléatoire :

Comme dans le cas du filtre de Kalman conditionnel, l'exploration de certaines composantes du bruit de dynamique, notamment les faibles dérives, peut être entièrement assurée par l'optimisation locale. L'exploration globale des autres composantes est assurée par des tirages aléatoires indépendants.

Pour le problème de poursuite GPS, seuls les bruits  $\pi_k w_k$  (changement de commande d'accélération) et  $u_K$  (changement de signe du bit de données) sont concernés par le tirage aléatoire.

D'après la dynamique des bits de donnée, pour chaque particule  $i$ , le tirage aléatoire équiprobable sur  $\{-1, 1\}$  de  $u_K$  est conditionnel à son instant de transition  $t_{transition}^i$ .

#### 3. Optimisation locale :

Pour chacune des particules, l'optimisation locale est assurée par un filtre de Kalman étendu conditionnel à sa trajectoire nominale, obtenue après l'exploration globale aléatoire.

Les composantes continues du bruit de dynamique sujettes aux tirages aléatoires sont affectées d'une (faible) variance. Ceci revient à la discrétisation gaussiennes de l'espace du bruit de dynamique selon ses composantes.

#### 4. Pondération :

Mise à jour, des vraisemblances et poids des particules de Dirac-Gauss au vu de la nouvelle observation  $y_k$ .

#### 5. Redistribution déterministe :

Les particules sont redistribuées au sens du maximum de vraisemblance conformément à leurs poids respectifs. L'algorithme utilisé est celui de la redistribution déterministe à maximum de vraisemblance avec affectation de poids  $\frac{\rho_i}{n_i}$  aux particules redistribuées sur la position  $i$ . Cette

technique évite la fixation arbitraire de seuil de redistribution et garantit une redistribution adaptative selon la connaissance acquise sur l'état.

Lors de la redistribution les particules naissantes héritent de tout le passé trajectorien de leurs mères, tant pour les positions que pour les covariances.

#### 6. Estimation au sens du maximum de vraisemblance :

L'estimée particulaire à maximum de vraisemblance est donnée par la particule la plus massive (ayant accumulée la vraisemblance maximale). La trajectoire à maximum de vraisemblance est donnée par les positions particulières pour les composantes discrètes d'état. Pour les composantes continues, elle s'obtient par lissage local conditionnel le long de la trajectoire gaussienne de la particule à maximum de vraisemblance.

La solution présentée, ici, est une version améliorée de celle décrite dans [Ziadi 01]. Elle présente l'inconvénient de nécessiter un nombre de particules élevé à cause de la redondance du tirage aléatoire. De plus, l'introduction artificielle de cet aléa, peu adapté à une formulation à maximum de vraisemblance, ne garantit la stabilité des performances qu'en moyenne. Ceci se traduit par une plus faible précision<sup>1</sup> notamment pendant les régimes transitoires (acquisition des sauts d'accélération et/ou de bit de données).

### 3-3 Récepteur à particules Déterministes de Dirac-Gauss

La solution décrite ici est basée sur l'exploration déterministe de l'espace des commandes (continues et discrètes) selon un maillage convenable prédéfini. Elle permet d'atteindre un meilleur compromis entre performance et complexité.

Le maillage particulaire évolue par branchement exhaustif selon les points de discrétisation des commandes et sélection déterministe des hypothèses les plus pertinentes.

L'algorithme du récepteur à particules déterministes de Dirac-Gauss du signal GPS en phase de poursuite est donné par :

#### 1. Initialisation :

- Répartition équidistante des particules gaussiennes  $\{x_0^i\}_{i=1}^N$  sur l'espace d'incertitude initiale,
- Attribution d'une même variance a priori aux particules élémentaires,
- Répartition des poids de particules selon la densité de probabilité a priori de l'état.

#### 2. Elimination d'Interpénétration :

Elimination des particules redondantes de plus faibles poids. Cette étape est réalisée de façon intermittente, à la même périodicité que l'étape de Branchement/Sélection.

#### 3. Branchement/Sélection déterministe :

- Pour chaque particule  $i$ , et chaque hypothèse  $w_{k+1} = w_j$  de la discrétisation du bruit de commande d'accélération, Calcul du poids a priori de la trajectoire  $(i, j)$ .
- Sélection des  $N$  trajectoires particulières les plus massives.

#### 4. Optimisation locale :

Optimisation locale par un filtre de Kalman étendu conditionnel à chacune des trajectoires particulières nominales retenues lors de la sélection.

#### 5. Pondération :

Mise à jour, des vraisemblances et poids des particules de Dirac-Gauss au vu de la nouvelle observation  $y_k$ .

---

<sup>1</sup>par rapport à la technique déterministe

## 6. Estimation au sens du maximum de vraisemblance :

Comme pour le filtre aléatoire, l'estimée particulière à maximum de vraisemblance est donnée par la particule la plus massive (ayant accumulé la vraisemblance maximale).

### 3-3-1 Décodage du message de navigation

Comme pour le traitement classique (verrouillage de phase avec une boucle de Costas), les deux filtres particuliers aléatoire/déterministe délivrent le message de navigation à un signe près. La levée de cette ambiguïté se fait lors de la synchronisation des sous-trames par comparaison aux préambules présents au début de chacune d'elles. Dans le cas d'un fonctionnement optimal, l'inversion de signe est la même pendant toute la réception du signal. En effet, en l'absence de perturbations extrêmes : longue période de trop faible observabilité et/ou fortes variations fréquentes de la dynamique de l'état, par rapport aux scénarios envisagés lors de la calibrations du filtre particulière, la phase estimée du signal demeure cohérente et ne donne pas lieu à une inversion parasite du signe du bit de donnée.

La détection et synchronisation des premières trames permet d'améliorer les performances du récepteur. En effet, à l'image des séquences d'apprentissage utilisées en télécommunication, l'utilisation des connaissances a priori sur les préambules et la répétitivité de certaines parties du message de navigation permet de réduire l'espace de recherche des bits de données et d'apporter plus de robustesse à la détection du message de navigation, notamment, en cas de faible observabilité.

Notons, par ailleurs, que la synchronisation (recherche des instants de transitions) des bits de donnée, par les récepteurs particuliers, est réalisée conjointement à l'estimation des autres paramètres d'état et ne nécessite plus un post-traitement particulier.

## 4 Résultats numériques

### 4-1 Conditions opératoires

Les deux algorithmes particuliers ont été testés pour une configuration de poursuite mono-code, mono-trajet et mono-satellite :

**Poursuite :** Le signal à l'entrée du filtre est de faible fréquence résiduelle. Il correspond à la sortie échantillonnée du corrélateur par le code Gold. Les commandes de l'oscillateur local du récepteur et des différentes branches de corrélation, réalisées par retour d'état dans une application réelle, sont ici simulées de façon indépendante, l'objectif étant d'étudier les performances en estimation des techniques particulières :

- Pour garantir une fréquence résiduelle faible malgré la forte dynamique, la fréquence de commande est obtenue ici par la fréquence Doppler moyenne sur un ensemble de période du code. Ceci se traduit par une fréquence résiduelle variable au cours du temps. La moyenne des fréquences Doppler couvre une durée choisie pour garantir un bon compromis entre la variation de la fréquence résiduelle et sa faible valeur ( $\sim 100\text{ Hz}$ ).
- Le signal utile récupéré à la sortie du corrélateur est un signal triangulaire de largeur  $2T_c$  : deux fois la durée du chip élémentaire. Après échantillonnage optimal (de périodicité égale à celle du chip), seules deux mesures contiennent le signal utile. Pour assurer la présence de ces mesures utiles parmi celles présentes à l'entrée des filtres particuliers, le signal GPS a été simulé pour tout les échantillons de corrélation correspondant au domaine de distance où évolue le porteur durant la simulation. Cette contrainte a été intentionnellement

non-respectée en fin de traitement, pour simuler une disparition du signal GPS après accrochage et montrer la pertinence de la probabilité de détection délivrée par les récepteurs particuliers.

**mono-code :** L'étude concerne la réception du signal GPS du service PPS, correspondant à la modulation par le code C/A de la porteuse L1 (de fréquence  $1575.42\text{ Hz}$ ). L'extension au code P de la technique est immédiate. Il ne s'agit, en fait, que d'une différence de paramètres numériques (longueur du code, longueur d'onde etc.) et non de principe.

Les caractéristiques de démodulation et de désétalement permettent de négliger les interférences entre le signal concerné par l'étude et ceux transmis simultanément par le même satellite. En effet, ces derniers présentent toutes les caractéristiques d'un bruit indépendant. Ils peuvent être immergés dans le bruit blanc gaussien de mesure.

**mono-trajet :** Bien que, les multi-trajets présentent une source d'erreur importante pour les applications GPS, notamment à l'intérieur des agglomérations, ce problème n'est pas abordé ici. Nous nous intéressons, en effet, dans un premier temps aux applications militaires aéronautiques du GPS, où le défi réside dans la tenue d'accrochage en présence de forte variation dynamique du système.

**mono-satellite :** Les signaux GPS en provenance des différents satellites visibles n'interfèrent pas entre eux en vertu des propriétés des codes utilisés. Le traitement du signal se fait donc sur des voies différentes, chacune d'entre elles étant affectée à un satellite donné. Les performances du récepteur sont indépendantes du code concrètement utilisé, qui n'intervient qu'au niveau du corrélateur, pour produire le signal triangulaire.

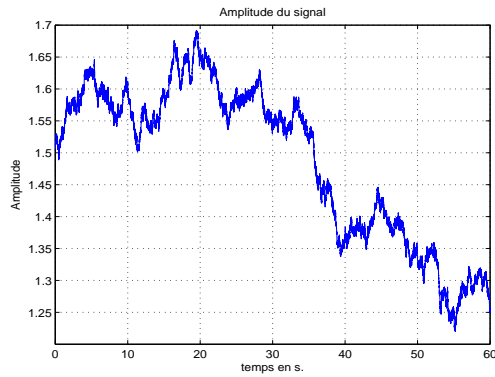
Notons cependant que, d'une part, la triangulation à partir des pseudo-distances estimées de plusieurs satellites est une optimisation non-linéaire qu'il convient de traiter avec des algorithmes adéquats pour en améliorer les performances, et que d'autre part, les bruits de mesure des différentes voies d'acquisition du signal sont corrélés (présence des contributions des autres satellites). Ceci montre que l'obtention des performances ultimes du positionnement nécessite un traitement conjoint des signaux de tous les satellites visibles, avec estimation de la matrice de corrélation du bruit de mesure. Ce traitement est accessible par l'extension Gauss-Wishart de la technique particulière, appliquée dans [Bensalem 02] au problème de réception pour voie montante en communications radiomobiles où la diversité des utilisateurs communicants rappelle celles des satellites visibles dans le problème GPS.

## 4-2 Simulations des mesures

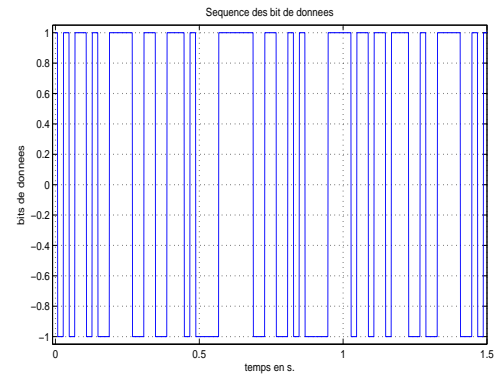
Les paramètres discrets et continus du problème GPS ont été simulés aléatoirement selon les équations de dynamique décrites dans la section 2, avec notamment les valeurs numériques suivantes pour l'évolution cinématique relative du porteur :

- Accélération maximale :  $10\text{ g}$  ( $100\text{ m/s}^2$ ),
- Vitesse maximale :  $1000\text{ m/s}$ ,
- Fréquence des sauts d'accélération :  $1\text{ Hz}$ ,
- Amplitude des sauts d'accélération :  $\pm 100\text{ m/s}^2$ .

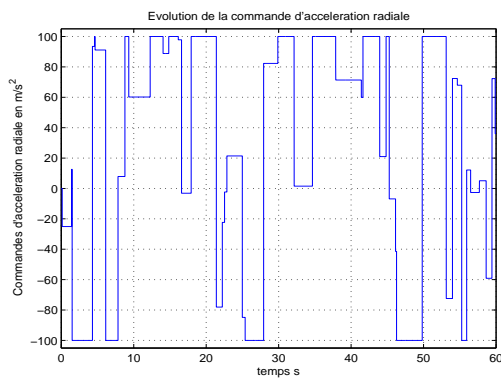
La figure III.3.1 présente l'évolution, pendant la durée de l'expérience, des différents paramètres d'état du système.



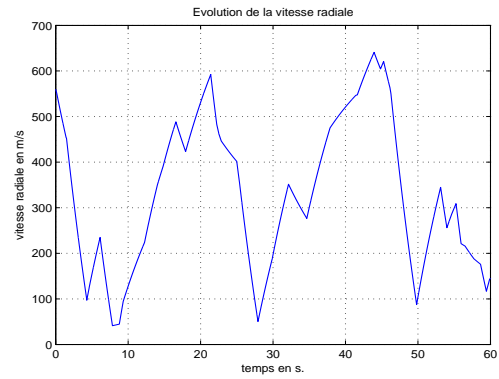
(a) Amplitude du signal GPS



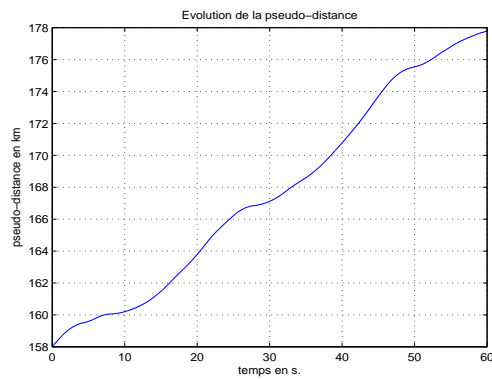
(b) Séquence des bits de données



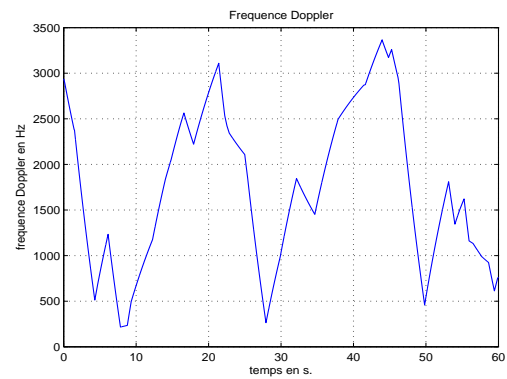
(c) Changement des commandes d'accélération radiale



(d) Vitesse radiale du satellite p/r au récepteur



(e) Pseudo-distance récepteur-satellite



(f) Fréquence Doppler du signal reçu

FIG. III.3.1 – Simulation des paramètres d'état du problème GPS



La figure III.3.2 présente la fréquence résiduelle du signal GPS après démodulation par la moyenne des fréquences Doppler sur une période de  $150\text{ ms}$  (150 période du code C/A).

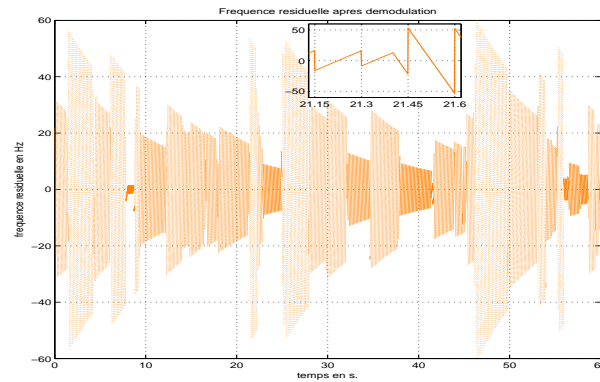


FIG. III.3.2 – Fréquence résiduelle du signal démodulé

Le signal GPS échantillonné à la sortie du corrélateur par le code C/A, fonction des paramètres simulés de l'état, est donné par l'équation de mesure (section 2). Il est ici calculé pour les échantillons de 400 à 600, couvrant la plage de distance  $117.3 - 176\text{ km}$ , où évolue le récepteur pendant les 50 premières secondes du traitement.

### 4-3 Performances du filtre particulaire de Dirac-Gauss

Les récepteurs particuliers ont été testés pour le même scénario dynamique (figure III.3.1) et les mêmes incertitudes initiales ( $450\text{ m}$  pour la distance et  $30\text{ m/s}$  pour la vitesse) pour différentes valeurs de rapport Signal/Bruit. Les versions aléatoires et déterministes sont comparées à performances locales égales (même variances élémentaires pour la décomposition initiale de l'espace d'état, et pour les hypothèses avec saut du bruit de dynamique).

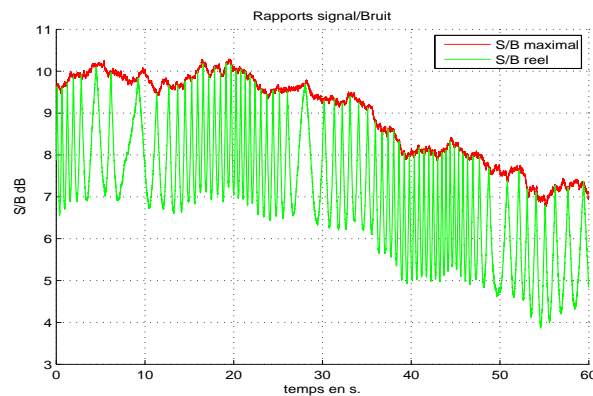


FIG. III.3.3 – Rapport S/B

La figure III.3.3 présente un exemple d'évolution du rapport Signal/Bruit à la sortie du corrélateur pour les expériences considérées. La courbe rouge représente le rapport nominal, classiquement considéré dans les applications GPS. Ce rapport suppose une synchronisation active des instants d'échantillonnage. L'absence de cette synchronisation, tel qu'il est le cas dans les expériences présentées ici, se traduit par une perte de rapport S/B (courbe verte), pouvant atteindre  $3\text{ dB}$ , fonction des positions des échantillons utiles sur le signal triangulaire de corrélation.

Les performances des récepteurs particuliers ne justifient pas le recours à la synchronisation active. Notons, toutefois, qu'il est aisé de la réaliser par un retour d'état asservi aux positions particulières pondérés (moyenne pondérée par les poids des retards fractionnaires particuliers).

#### 4-3-1 Rapport S/B de 7 à 10 dB

Le Rapport S/B est représenté sur la figure III.3.3 du paragraphe précédent.

Les figures suivantes présentent les performances atteintes par le récepteur à particules déterministes de Dirac-Gauss<sup>2</sup> :

- Figure III.3.4 : Probabilité de détection (normalisée) :

Elle est donnée par le rapport entre la vraisemblance de l'hypothèse de présence du signal (somme des poids non-pondérés des particules) et celle de présence du bruit seul dans les mesures GPS. La probabilité de détection converge rapidement vers 1 ( $\sim 3\text{ ms}$ ). Après perte du signal GPS (récepteur en dehors de la fenêtre d'observation  $\sim 117.3 - 176\text{ km}$ ), la probabilité de détection décroît jusqu'à l'extinction. Ceci témoigne de la pertinence de cet indicateur d'accrochage.

La figure III.3.4 présente aussi (courbe rouge) le rapport de pertinence de la particule la plus massive, donné par le rapport entre sa vraisemblance non-normalisée et celle du bruit seul. Cette valeur traduit la confiance en l'estimée particulière. En cas de détection du signal avec une forte incertitude sur ses paramètres, l'écart entre ces deux probabilités de détection augmente.

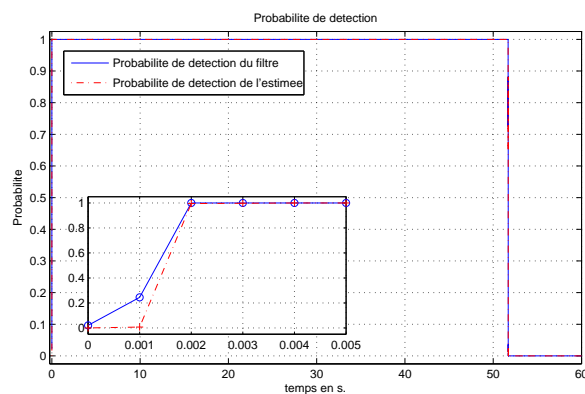


FIG. III.3.4 – Probabilité de détection

<sup>2</sup>Pour des raisons d'encombrement, celles obtenues par la technique aléatoire ne sont pas reportées ici. En effet, les deux méthodes sont comparées à performances égales aussi hautes que possibles.

- Figure III.3.5 : Estimation de l'amplitude du signal reçu :  
Conjointement à l'estimation de la distance récepteur/satellite, l'amplitude permet d'estimer le niveau du rapport Signal/Bruit et, donc, d'adapter le paramétrage du filtre particulaire (nombre de particules, nombre de points de discrétisation des bruit de dynamique, etc.) pour une application temps-réel.

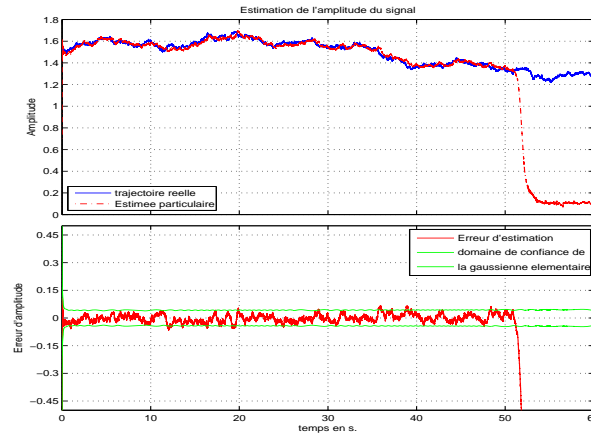


FIG. III.3.5 – Estimation de l'amplitude du signal

- Figure III.3.6 : Estimation de la pseudo-distance :  
Objectif principal de la réception du signal GPS, l'estimée de la pseudo-distance permet, par triangularisation à partir de plusieurs satellites, la localisation du récepteur. La précision du positionnement dépend fortement de celle de l'estimation de la pseudo-distance. Malgré la forte dynamique imprévisible du récepteur, le filtre particulaire permet d'atteindre des précisions inférieures au mètre.

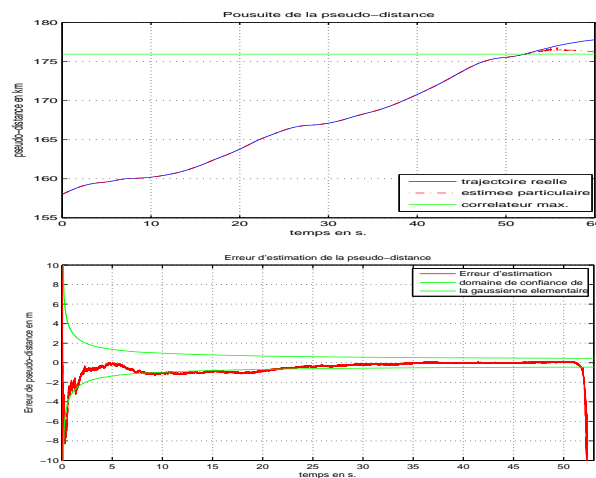


FIG. III.3.6 – Estimation de la pseudo-distance

- Figure III.3.7 : Estimation de la vitesse radiale relative du récepteur/satellite :  
Le bénéfice de l'estimation conjointe pseudo-distance/phase et de l'intégration cohérente longue permise par la technique particulière permet d'atteindre des précisions de l'ordre de  $5\text{ cm/s}$ , malgré les fortes contraintes dynamiques considérées.

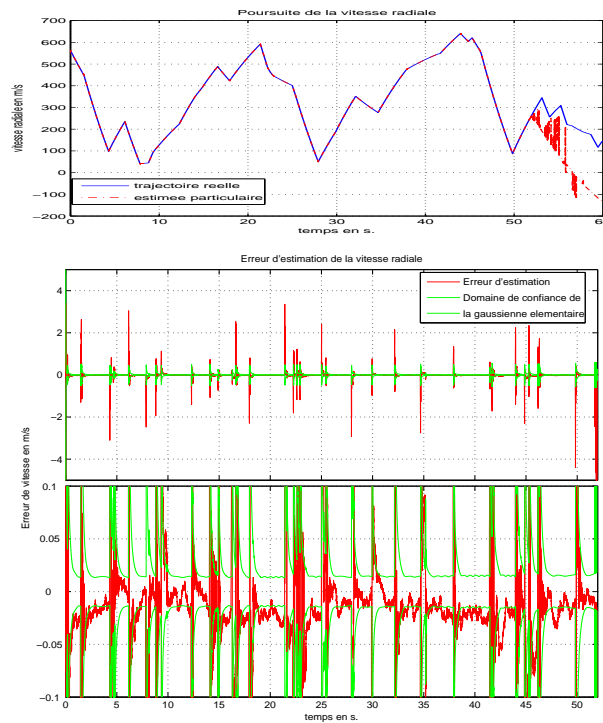


FIG. III.3.7 – Estimation de la vitesse radiale

La fréquence Doppler étant proportionnelle à la vitesse radiale :  $f_D = \frac{v}{C} f_1$  (avec  $f_D$  fréquence Doppler,  $v$  vitesse radiale,  $C$  vitesse de la lumière, et  $f_1$  fréquence porteuse du signal GPS), ses statistiques sont, directement, obtenues par transformation linéaire de celles de la vitesse.

La technique particulière permet d'atteindre des précisions (Figure III.3.8) :

- inférieures à  $0.25\text{ Hz}$ , en régime “stationnaire” (sans saut d'accélération),
- inférieures à  $15\text{ Hz}$  en régime transitoire (acquisition d'un saut d'accélération).

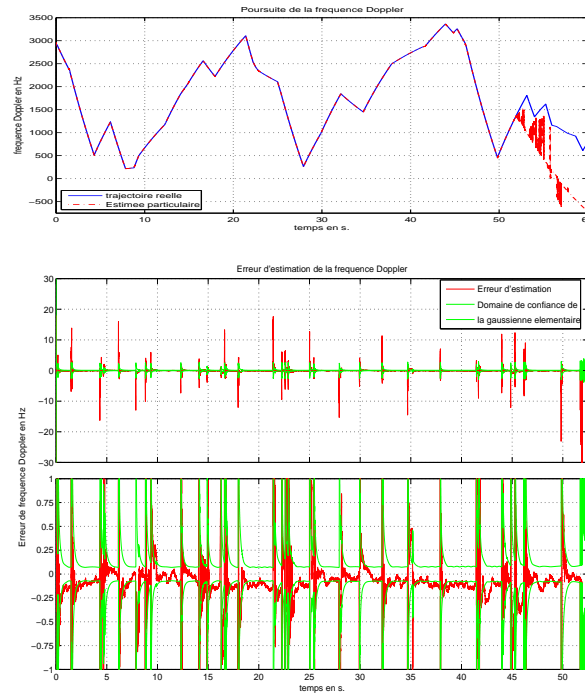


FIG. III.3.8 – Estimation de la fréquence Doppler

- Figure III.3.9 : Poursuite des commandes d'accélération radiale :

La technique particulière permet de détecter l'occurrence des sauts d'accélération fréquents de fortes amplitudes (jusqu'à  $10g$ ) et d'en estimer les valeurs, avec une précision de quelques millisecondes (de l'ordre de la périodicité de Branchement/Sélection) sur l'instant d'occurrence, et de quelques dizaines de  $cm/s^2$  pour l'amplitude.

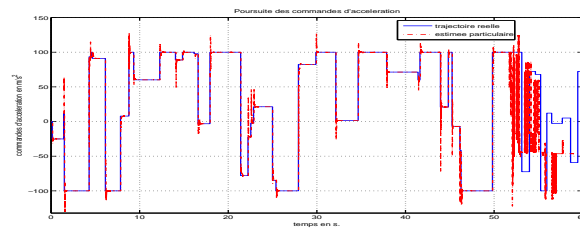


FIG. III.3.9 – Poursuite des commandes d'accélération

- Figure III.3.10 : Détection du message binaire de navigation.

Pour les rapports Signal/Bruit considérés ( $7 - 10 dB$ ), le récepteur particulière affiche des performances optimales pour la détection et la synchronisation. En effet, outre l'exactitude de l'instant de transition des bits, la séquence à maximum de vraisemblance (courbe verte) ne souffre d'aucune erreur de détection pendant l'accrochage ( $\sim 50$  premières secondes, soit plus de 2500 bits de données).

La figure III.3.10 présente aussi (courbe rouge) la séquence obtenue par la collection des bits de données à maximum de vraisemblance “marginale “ ( $\max(V(D_k|Y_k))$  pour  $k \in \{0, \dots, T\}$ ). Cette estimée dans le sens direct présente un taux d’erreur plus élevé inhérent à l’incertitude initiale aux instants de transition. Sous forte observabilité, l’incertitude est rapidement levée par les mesures suivantes ( $< 2\text{ ms.}$ ).

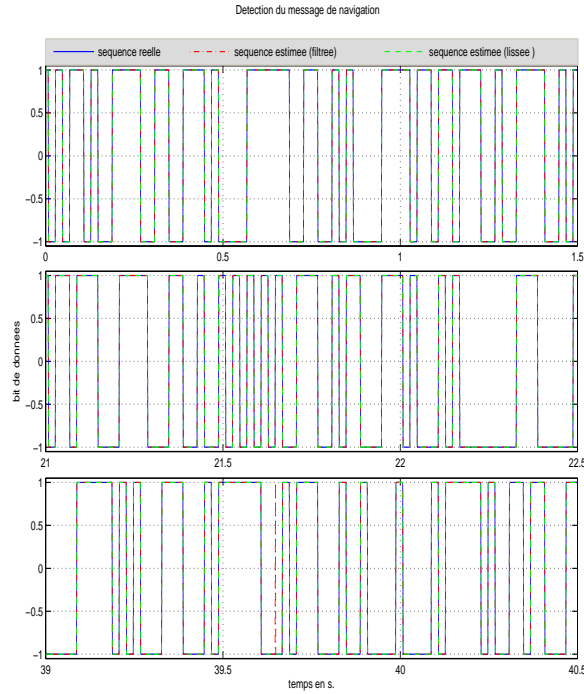


FIG. III.3.10 – Détection des bits du message de navigation

L’application réaliste de la technique particulière requiert un asservissement par retour d’état de la fréquence de démodulation pour garantir une faible fréquence résiduelle. La fréquence de commande est, dans ce cas, donnée, par la moyenne pondérée des fréquences particulières (minimum de variance de la fréquence résiduelle).

La Figure III.3.11 présente la fréquence résiduelle obtenue pour un tel asservissement. Cette fréquence n’excède pas  $20\text{ Hz}$ , pour les rapports Signal/Bruit considérés. Elle vérifie pleinement la condition de démodulation nécessaire ( $\sim 100\text{ Hz}$ ) pour garantir la fiabilité de la corrélation par le code.

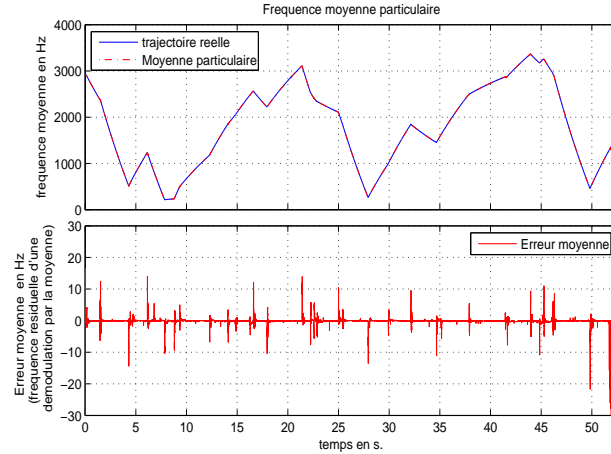


FIG. III.3.11 – Fréquence résiduelle

A ce niveau favorable de rapport Signal/Bruit, le filtre particulaire aléatoire permet d'atteindre les mêmes performances que le déterministe, avec un nombre de particules plus important en phase de poursuite<sup>3</sup>(240 pour la version aléatoire contre 24 pour la version déterministe). En effet, la différence entre les deux filtres réside dans la politique d'exploration de l'espace du bruit de dynamique (tirage aléatoire/discrétisation fixe optimisée) qui se manifeste, notamment, lors de la poursuite des sauts d'accélération.

#### 4-3-2 Rapport S/B de $-3$ à $0$ dB

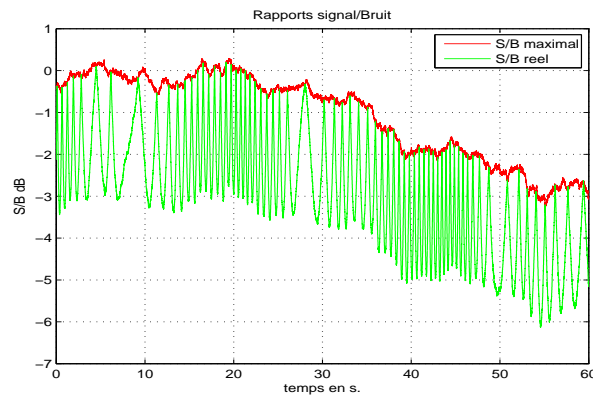


FIG. III.3.12 – Rapport S/B

<sup>3</sup>Après synchronisation parfaite des bits de données : détection “certaine” de l’instant de transition, optimisation paramétrique dont les performances dépendent de la fidélité de l’approximation initiale de la densité de probabilité a priori et non des capacités exploratrices de la technique de filtrage utilisée.

Les filtres particuliers ont été testés pour des rapports S/B négatifs. Les performances du filtre à particules déterministes de Dirac-Gauss sont reportées sur les figures III.3.13 à III.3.19.

Le filtre déterministe permet d'atteindre une précision de

- quelques mètres ( $< 3\text{ m}$ ) sur la pseudo-distance,
- $< 10\text{ cm/s}$  sur la vitesse radiale pendant les régimes permanents (après acquisition d'un saut d'accélération). Soit,  $0.5\text{ Hz}$  sur la fréquence Doppler,

avec une poursuite fiable des sauts d'accélération radiale et une détection quasi-parfaite des bits de donnée (1 seul bit erroné sur environ 2500.).

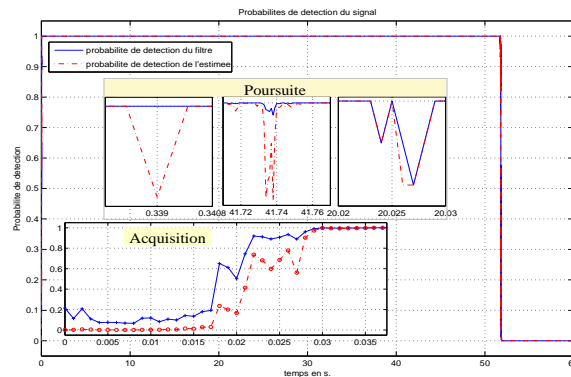


FIG. III.3.13 – Probabilité de détection

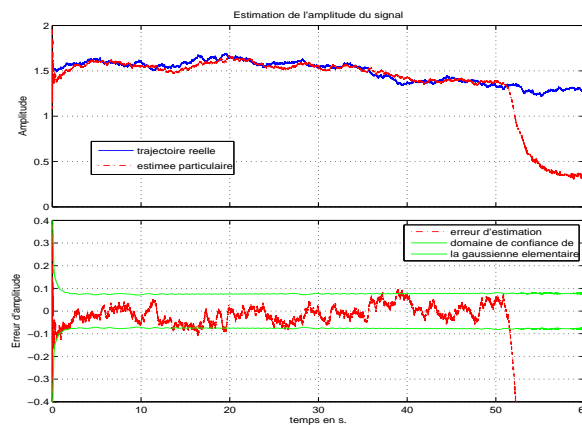


FIG. III.3.14 – Estimation de l'amplitude du signal



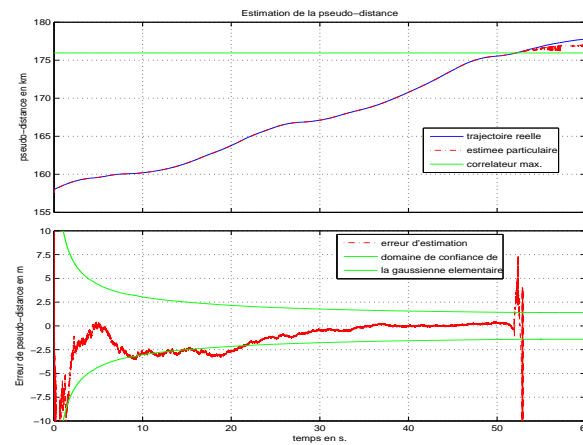


FIG. III.3.15 – Poursuite de la pseudo-distance

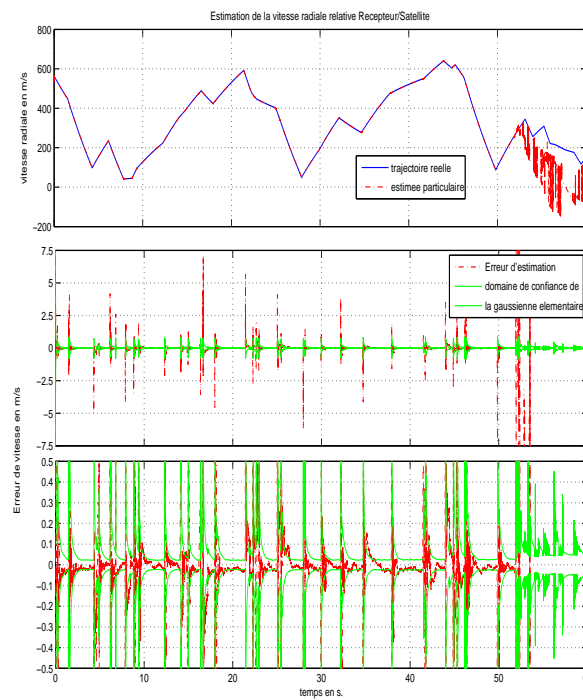


FIG. III.3.16 – Poursuite de la vitesse radiale

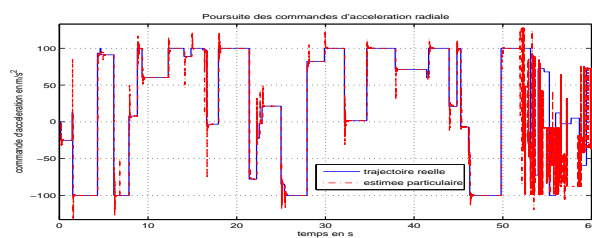


FIG. III.3.17 – Poursuite des commandes d'accélération

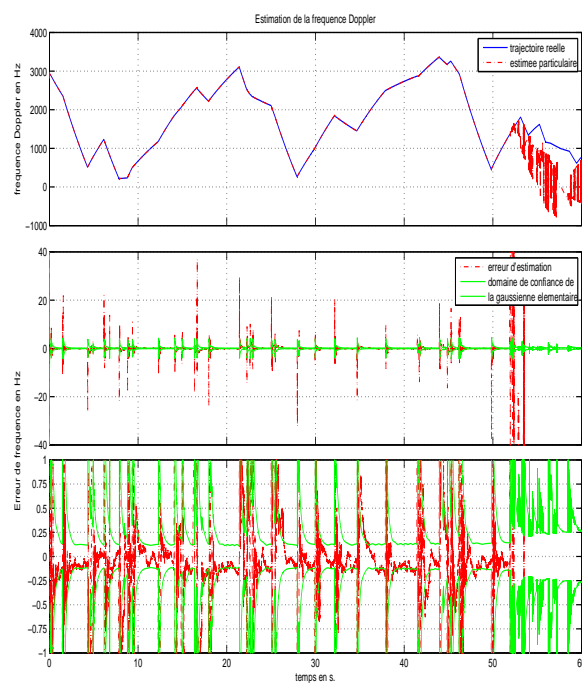


FIG. III.3.18 – Poursuite de la fréquence Doppler

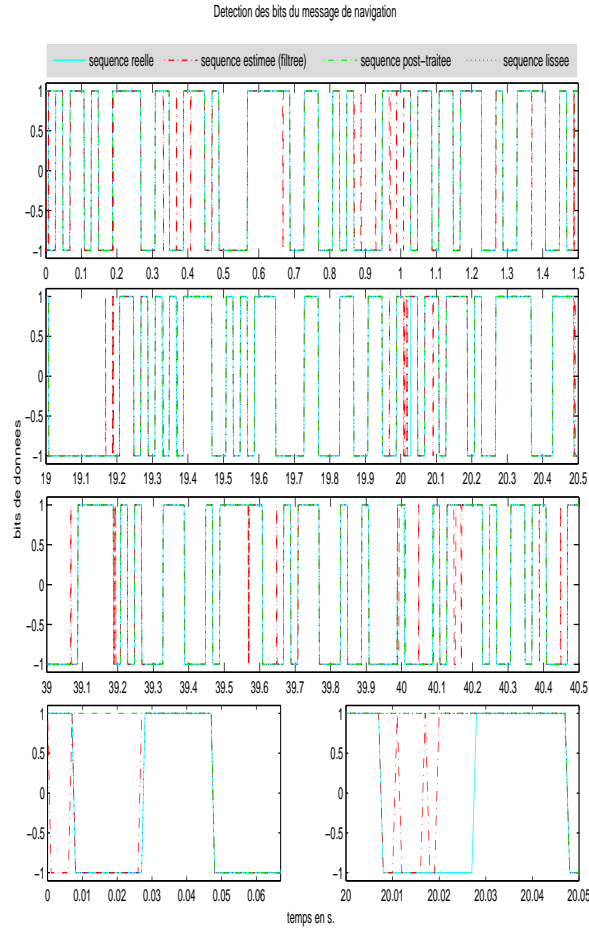


FIG. III.3.19 – Détection des bits du message de navigation

La figure III.3.19 présente :

- la séquence estimée : collections des estimées des bits de données du filtre avant,
- la séquence lissée : obtenue le long de la trajectoire à maximum de vraisemblance à la fin du traitement,
- la séquence “post-traitée” : elle correspond à la dernière valeur de bit estimée par le filtre-avant toutes les 20 *ms*, en tenant compte de l’instant de transition ( $\propto$  un lissage glissant avec une périodicité de 20 *ms*). Cette estimée<sup>4</sup> présente un taux d’erreur légèrement plus important pendant la phase d’accrochage.

<sup>4</sup>garantie de la possibilité d’un traitement temps-réel

La figure III.3.20 présente l'évolution de l'écart entre la fréquence Doppler particulière moyenne et celle simulée. Cet écart ( $< 30 \text{ Hz}$ ) respecte la contrainte sur la fréquence résiduelle.

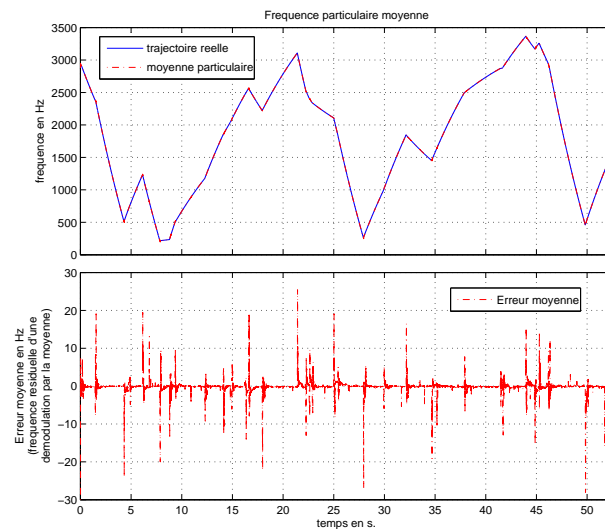


FIG. III.3.20 – Fréquence résiduelle

L'application de la technique particulière aléatoire à ce niveau de rapport S/B ne permet un accrochage continu qu'à partir de 10000 particules (contre 144 pour la technique déterministe). L'allocation d'un nombre aléatoire moindre (4000 particules) se traduit par des décrochages/réaccrochages assez fréquents qui entraînent des inversions parasites du signe des bits de donnée.

#### 4-3-3 Rapports S/B plus faibles

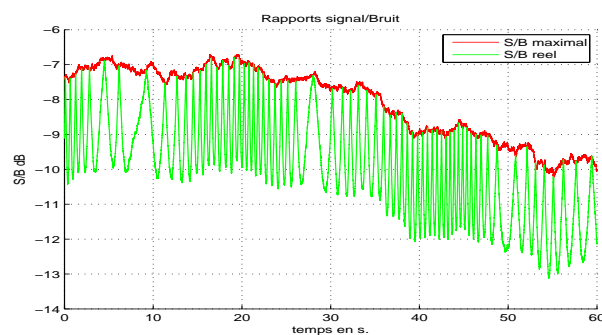


FIG. III.3.21 – Rapport S/B

La technique déterministe permet d'atteindre les performances ultimes permises par la répétitivité des bits de données :  $\sim -7\text{ dB}$ . Au delà, la détection de ces bits est incertaine à cause de leur faible observabilité en dépit de l'intégration cohérente sur toute la durée ( $20\text{ ms}$ ). Cependant, les expériences menées à des rapports S/B compris entre  $-10$  et  $-7\text{ dB}$ , montrent une bonne estimation des paramètres continus du problème (de l'ordre d'une dizaine de mètres sur la pseudo-distance), malgré l'incertitude des bits.

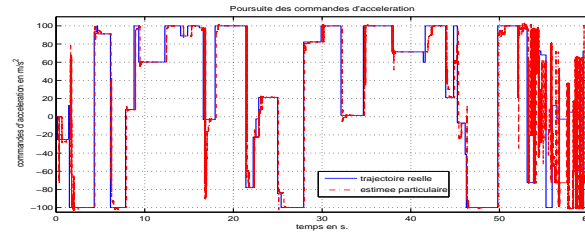


FIG. III.3.22 – Poursuite des commandes d'accélération

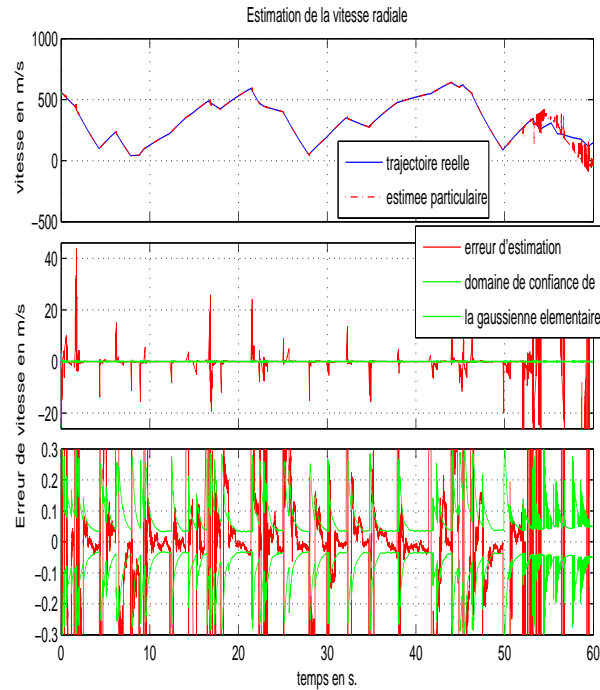


FIG. III.3.23 – Poursuite de la vitesse radiale

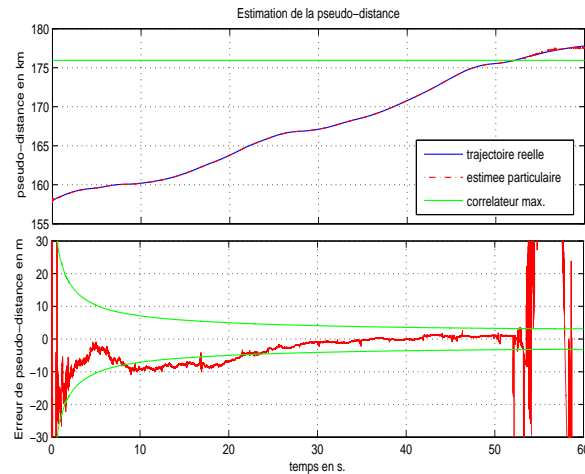


FIG. III.3.24 – Poursuite de la pseudo-distance

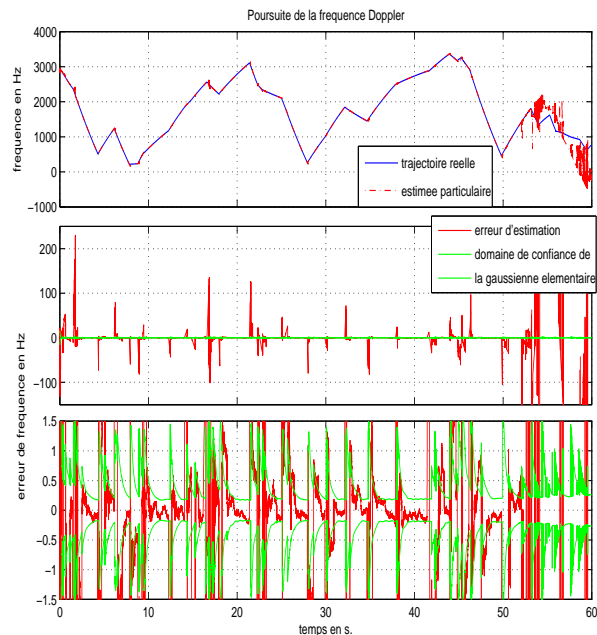


FIG. III.3.25 – Poursuite de la fréquence Doppler

## 5 Conclusion

Les récepteurs particuliers ont permis la poursuite efficace du signal GPS dans des conditions extrêmes de dynamique et d'observabilité. Le faible nombre de particules nécessaires pour la stratégie déterministe (une centaine jusqu'à  $-3$  dB) permet d'envisager une mise en œuvre temps-réel de cette technique. Une évaluation sur données réelles reste, néanmoins, nécessaire pour finaliser la validation de cette méthode.



## Chapitre 4

# Réception particulière en acquisition/poursuite du signal GPS : Architecture Chip à Chip

### 1 Introduction

Le récepteur présenté dans le chapitre précédent suppose les conditions classiques de compensation du Doppler au niveau du filtre d'entrée. Or, les techniques d'acquisition classiques ne s'appliquent plus sous les contraintes de dynamiques et d'observations considérées par la présente étude.

Nous développons, ici, une solution particulière basée sur une modification de la chaîne de pré-traitement du signal reçu, permettant de s'affranchir de cette limitation. Par cette solution, la démodulation du Doppler, ainsi que le désétalement du spectre du signal reçu sont conjointement réalisés dans le calcul récursif de chaque vraisemblance particulière.

### 2 Filtre adapté au chip élémentaire

Pour une forme d'onde rectangulaire du chip élémentaire du code C/A :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq T_c \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Le filtre adapté au signal reçu  $s(t)$ , maximisant le rapport Signal/Bruit, est donnée par l'intégration du signal reçu sur la période  $T_c$  du chip :

$$C_{T_c}(0) = \int_0^{T_c} s(t) dt$$

Les principales opérations réalisées par le pré-traitement modifié proposé sont, alors :

- démodulation de la porteuse,
- filtrage adapté au chip élémentaire du signal démodulé pour chaque intervalle de réception  $[(k-1)T_c, kT_c]$ .



La démodulation rémanante due au Doppler est à la charge du filtre particulière, de sorte que l'indépendance du pré-traitement soit bien préservée.

### 3 Modèle d'état

#### 3-1 Modèle d'observation

Le signal GPS reçu à l'entrée de l'antenne est donné par,

$$y(t) = \frac{A_t}{R_t} C(t - R_t/c) D(t - R_t/c) \sin(2\pi f_1(t - R_t/c) + \phi_t) + \beta_t$$

Démodulé dans la bande de base ( $B$ ) en deux composantes I et Q, le signal à la sortie du démodulateur s'écrit sous la forme complexe :

$$y(t) = \frac{A_t}{R_t} C(t - R_t/c) D(t - R_t/c) e^{-2\pi f_1 R_t/c + \phi_t} + \beta_t$$

Pour chaque période de réception  $[(k-1)T_c, kT_c]$ , le signal discret à la sortie du corrélateur par le chip élémentaire est donné par,

$$\begin{aligned} y_k &= \int_{(k-1)T_c}^{kT_c} y(t) dt \\ &= \int_{(k-1)T_c}^{kT_c} \frac{A_t}{R_t} C(t - R_t/c) D(t - R_t/c) e^{-2\pi f_1 R_t/c + \phi_t} dt \\ &= \int_{(k-1)T_c}^{t_k^{tr}} \frac{A_k}{R_k} C_{k-1-\lfloor \frac{R_k}{cT_c} \rfloor} D_{k-1-\lfloor \frac{R_k}{cT_c} \rfloor} e^{-2\pi f_1 R_k/c + \phi_k} dt \\ &\quad + \int_{t_k^{tr}}^{kT_c} \frac{A_k}{R_k} C_{k-\lfloor \frac{R_k}{cT_c} \rfloor} D_{k-\lfloor \frac{R_k}{cT_c} \rfloor} e^{-2\pi f_1 R_k/c + \phi_k} dt \\ &= \frac{A_k}{R_k} C_{k-1-\lfloor \frac{R_k}{cT_c} \rfloor} D_{k-1-\lfloor \frac{R_k}{cT_c} \rfloor} e^{-2\pi f_1 R_k/c + \phi_k} \left( \frac{R_k}{c} - \left\lfloor \frac{R_k}{cT_c} \right\rfloor T_c \right) \\ &\quad + \frac{A_k}{R_k} C_{k-\lfloor \frac{R_k}{cT_c} \rfloor} D_{k-\lfloor \frac{R_k}{cT_c} \rfloor} e^{-2\pi f_1 R_k/c + \phi_k} \left( \left( \left\lfloor \frac{R_k}{cT_c} \right\rfloor + 1 \right) T_c - \frac{R_k}{c} \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

où  $t_k^{tr}$  l'instant de transition du bit du code C/A dans l'intervalle  $[(k-1)T_c, kT_c]$  est donnée par  $t_k^{tr} = (k-1)T_c + (\frac{R_k}{cT_c} - \lfloor \frac{R_k}{cT_c} \rfloor)T_c$ .

#### 3-2 Modèle dynamique

La dynamique des paramètres d'état du système suit le même modèle que celui utilisé pour le problème de poursuite (Chapitre 3). La nouvelle architecture de réception affecte uniquement le modèle d'observation. Notons, cependant, que le pas d'échantillonnage de cette dynamique (naturellement continue pour les variables cinématiques) est plus faible. Il correspond à la durée d'un chip unitaire du code C/A et non à la durée totale de ce code (1023 fois plus importante). Ceci permet une description plus fine de l'état et une prise en compte meilleure des variations rapides (telle que la rotation de la phase Doppler).

Ainsi, le mouvement relatif du récepteur par rapport au satellite est décrit par un modèle de Singer

modifié :

$$\begin{cases} R_{k+1} = R_k + v_k T_c \\ v_{k+1} = v_k(1 - \alpha T_c) + \gamma_k T_c \\ \gamma_{k+1} = \gamma_k + \pi_k w_k \end{cases}$$

avec  $R_k$ ,  $v_k$  et  $\gamma_k$  représentent respectivement la pseudo-distance, les vitesse et accélération radiales du récepteur,  $\pi_k w_k$  bruit blanc d'amplitude gaussienne et d'occurrence poissonnienne représentant les sauts de commande d'accélération,  $\alpha$  coefficient de viscosité et  $T_c$  durée du chip élémentaire ( $\sim 1\mu s$ ).

$A_k$  et  $\phi_k$ , amplitude et phase respectives du signal reçu, sont modélisées par des processus stochastiques de faible dérive gaussienne :

$$\begin{cases} A_{k+1} = A_k + \delta A_k \\ \phi_{k+1} = \phi_k + \delta \phi_k \end{cases}$$

## 4 Solution Particulaire

### 4-1 Discrétisation particulière de l'espace d'état

Les non-linéarités dominantes dans l'équation d'observation 4.1 sont les mêmes que pour le cas poursuite (chapitre 3). Il en découle les mêmes conditions concernant la discrétisation des espaces d'état initial et de bruit de dynamique : discrétisation par des mesures pondérées de Dirac-Gauss.

### 4-2 Algorithme de filtrage

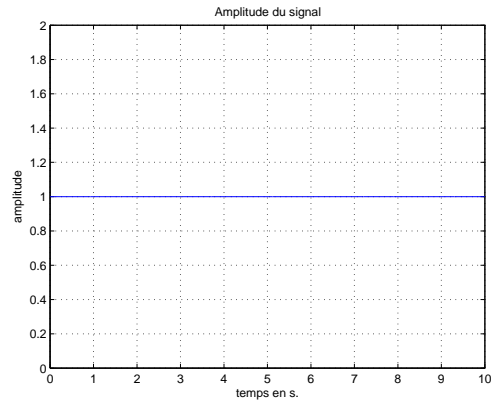
De même, l'algorithme de filtrage reste inchangé (chapitre 3). En effet, les spécificités du mode acquisition/poursuite ne concerne que les équations de mesures et la fréquence de réception des observations. Ces caractères n'affectent que le calcul de la fonction de mesure  $h(\cdot)$  et de ses jacobiens  $H(\cdot)$  utilisés pour les étapes d'optimisation locale et de pondération. La périodicité des branchement/sélection reste la même.

La cohérence du signal GPS permet de synchroniser les instants de transition des bits de données au chip près pour chaque hypothèse particulière.

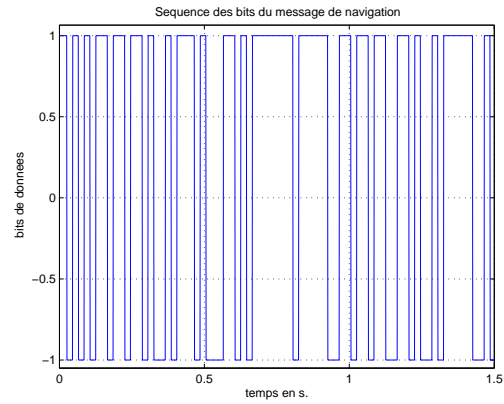
## 5 Résultats numériques

### 5-1 Simulations des mesures

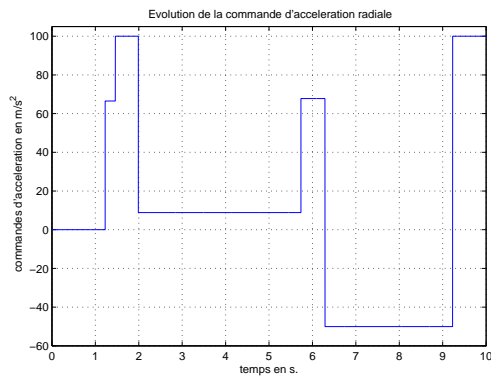
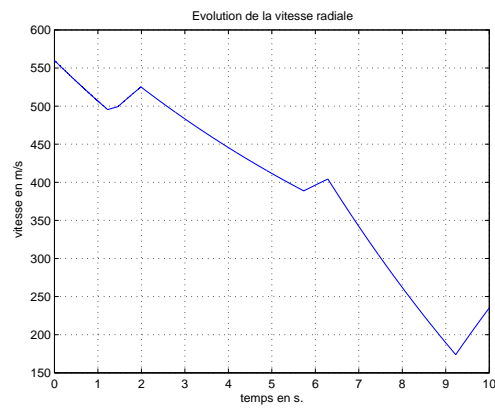
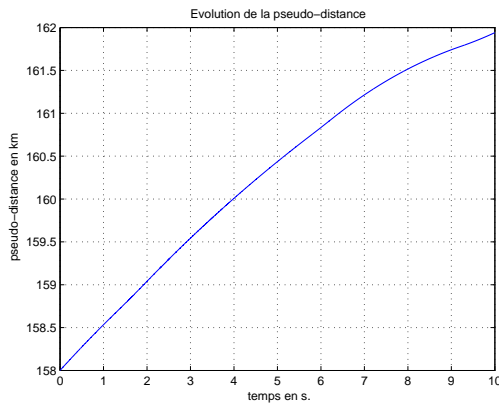
Le récepteur particulière déterministe a été testé pour un même scénario dynamique (figure III.4.1) pour différentes valeurs de rapport Signal/Bruit.



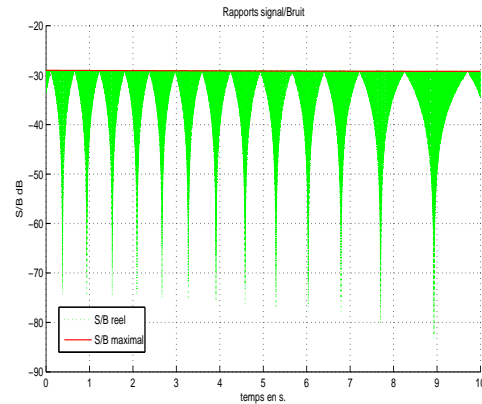
(a) Amplitude du signal GPS



(b) Séquence des bits de données

(c) Changement des commandes  
d'accélération radiale(d) Vitesse radiale du  
satellite p/r au récepteur

(e) Pseudo-distance récepteur-satellite



(f) Rapport Signal/Bruit

FIG. III.4.1 – Simulation des paramètres d'état du problème GPS

## 5-2 Performances du filtre particulaire

### 5-2-1 Rapport S/B de $-30\text{ dB}$

Ce niveau de rapport signal/bruit est équivalent à  $0\text{ dB}$  à la sortie du corrélateur par le code. Pour 288 particules, on retrouve des performances équivalentes au cas de poursuite malgré une incertitude initiale plus importante ( $900\text{ m}$  pour la distance,  $300\text{ m/s}$  pour la vitesse).

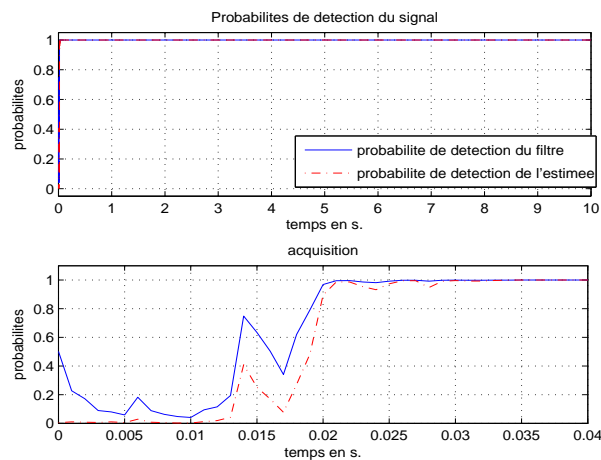


FIG. III.4.2 – Probabilité de détection

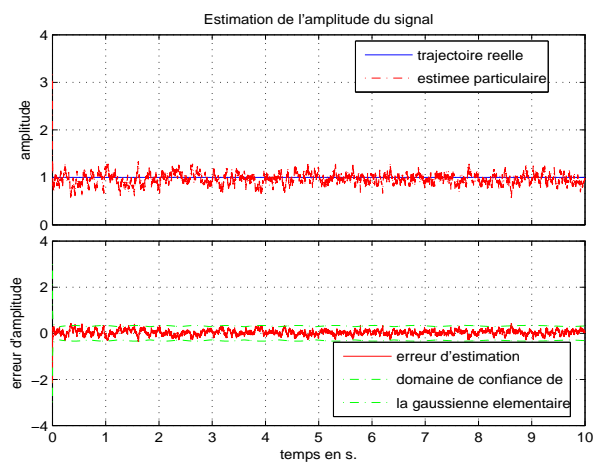


FIG. III.4.3 – Estimation de l'amplitude du signal

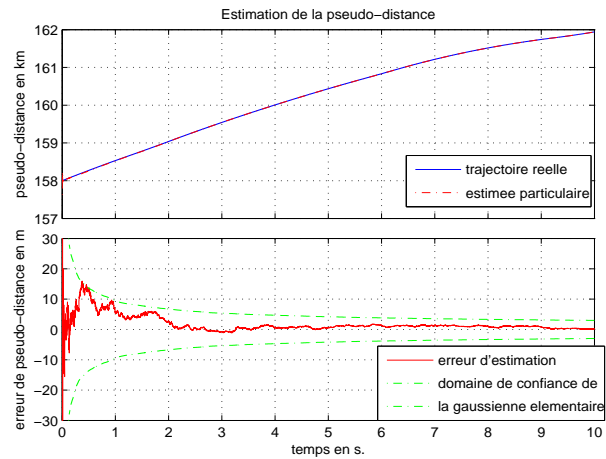


FIG. III.4.4 – Poursuite de la pseudo-distance

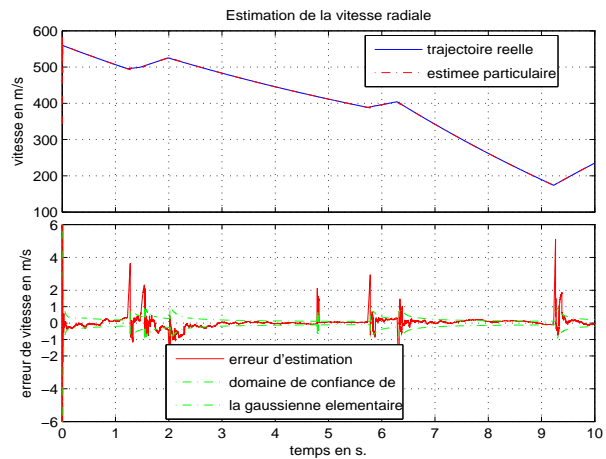


FIG. III.4.5 – Poursuite de la vitesse radiale

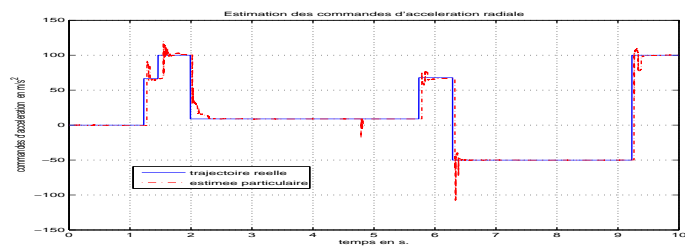


FIG. III.4.6 – Poursuite des commandes d'accélération

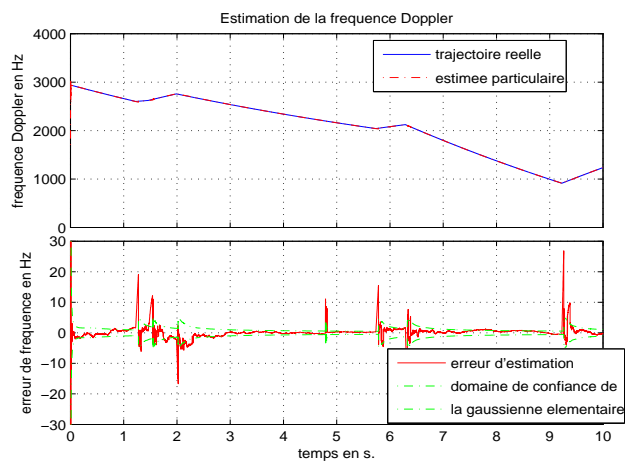


FIG. III.4.7 – Poursuite de la fréquence Doppler

L'erreur d'estimation de la fréquence Doppler décroît rapidement ( $\ll 1$  s, cf figure III.4.7). Ceci permet une initialisation adéquate du mode poursuite.

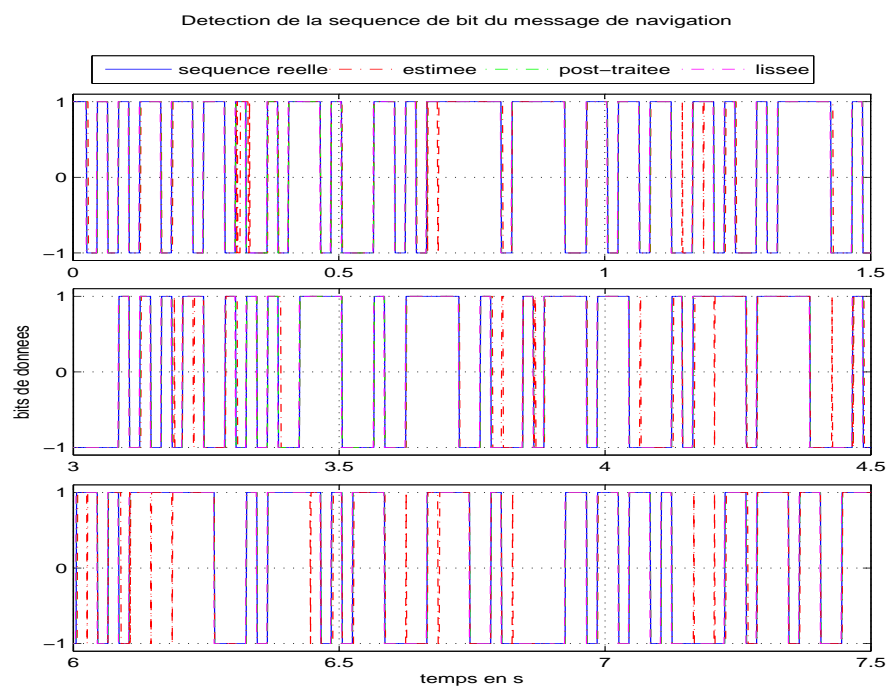


FIG. III.4.8 – Détection des bits du message de navigation

La détection à maximum de vraisemblance de la séquence des bits du message de navigation (séquence lissée) ne souffre à ce rapport signal/bruit d'aucune erreur sur toute la durée de l'expérience (500 bits de 20 ms chacun). Naturellement, un taux d'erreur plus élevé est observé sur la séquence estimée (filtre avant). Cette erreur est due à l'incertitude initiale sur le bit de donnée. Elle est levée par l'intégration cohérente sur la durée de 20 ms comme le montre l'absence d'erreur de détection pour la séquence "post-traitée" (lissée sur 20 ms uniquement).

### 5-2-2 Rapport S/B de $-36.5\text{ dB}$

Ce niveau de rapport signal/bruit ( $\equiv -6.5\text{ dB}$  après désétalement par le code) est la limite des performances ultimes en détection des bits de données. Malgré ces conditions extrêmes, le filtre affiche une bonne capacité de détection et de tenue en accrochage du signal.

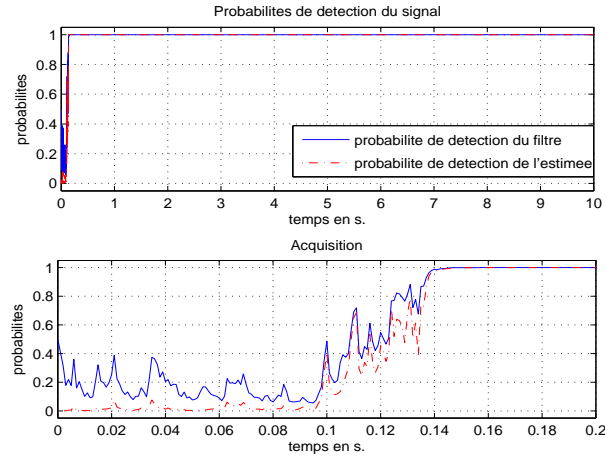


FIG. III.4.9 – Probabilité de détection

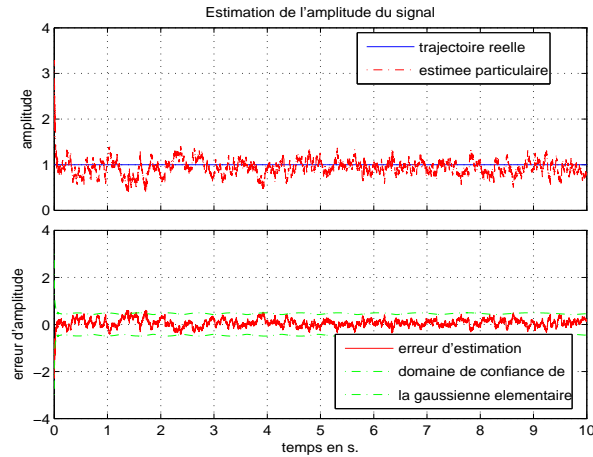


FIG. III.4.10 – Estimation de l'amplitude du signal

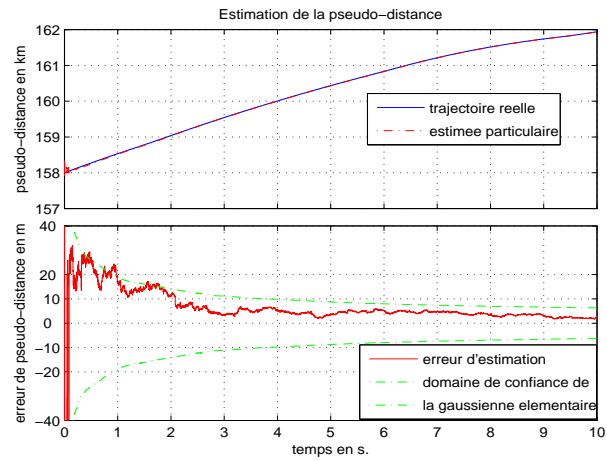


FIG. III.4.11 – Poursuite de la pseudo-distance

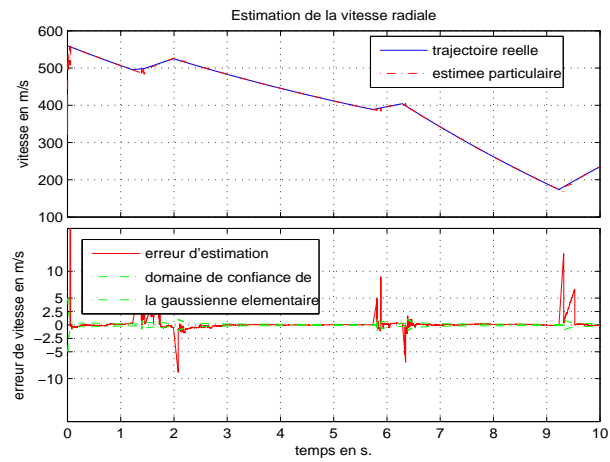


FIG. III.4.12 – Poursuite de la vitesse radiale

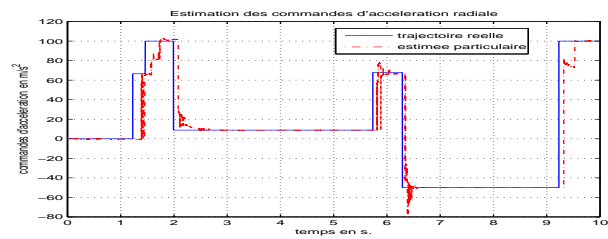


FIG. III.4.13 – Poursuite des commandes d'accélération



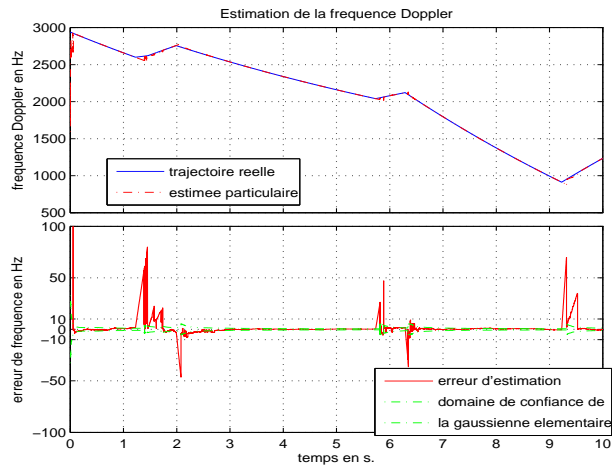


FIG. III.4.14 – Poursuite de la fréquence Doppler

La convergence rapide du filtre, notamment en fréquence Doppler, permet d'initialiser la démodulation en amont de cette fréquence avec une précision inférieure à 100  $Hz$  et de commuter en mode poursuite, plus économe en calcul.

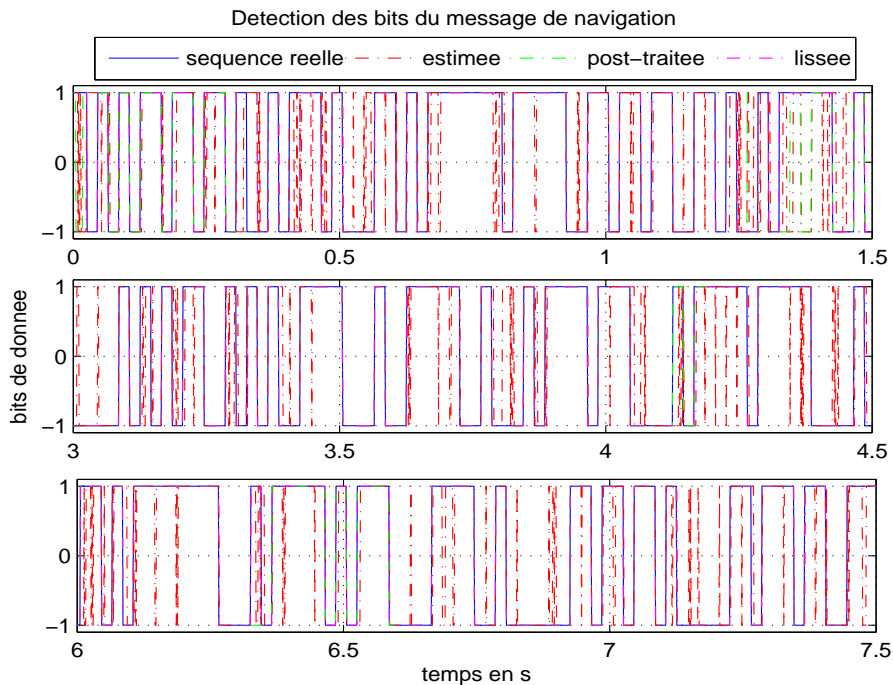


FIG. III.4.15 – Détection des bits du message de navigation

A ce niveau limite de rapport signal/bruit, le taux d'erreur de bit observé est de l'ordre de 6 ‰.

## 6 Conclusion

Malgré une forte dynamique associée aux incertitudes initiales de vitesse et aux aléas d'accélération, le récepteur à particules déterministes de Gauss permet d'atteindre les performances ultimes :

- détection des états discrets (bits de données, ...),
- estimation et poursuite des états continus (pseudo-distance, fréquence Doppler, ...),

du signal GPS.

Ces performances, illustrées par des simulations réalistes, offrent une plus grande autonomie à la localisation par satellites, notamment pour des applications critiques (aéronautiques, militaires, ...). Elles nécessitent, toutefois :

- d'une part, la validation sur données réelles : étape ultime pour l'évaluation du récepteur,
- et d'autre part, une étude de faisabilité du cas multi-satellites, notamment pour le partage des ressources de calcul entre les différentes voies (satellites) et la gestion de la commutation entre les deux modes de fonctionnement (acquisition/poursuite, poursuite).



## Chapitre 5

# Conclusion de la troisième partie

Les récepteurs GPS modernes permettent d'accéder à des performances convenables de positionnement. Cependant, ces performances sont considérablement dégradées en présence de fortes dynamiques. C'est notamment le cas pour les applications aéronautiques/militaires. Des solutions basées sur l'intégration des mesures GPS avec d'autres sources d'informations (centrale inertielle, etc.) permettent d'améliorer ces performances. Cependant, de telles solutions sont préjudiciables à l'autonomie du positionnement, qui figure parmi les premières motivations du système GPS.

Les récepteurs particuliers proposés ici permettent, d'une part, de préserver de hautes performances sur l'estimation de la pseudo-distance, point clé du positionnement par satellite, et d'autre part, de garantir l'autonomie du récepteur GPS, sous fortes dynamiques et faibles observabilités. Ils représentent, de ce fait, une solution prometteuse pour les applications les plus exigeantes.

Pour des rapports Signal/Bruit nominaux, de 0 à 10 dB à la sortie du filtre adapté, le récepteur particulier déterministe ne requiert que très peu (quelques dizaines) de particules pour assurer la tenue en accrochage sous forte dynamique avec l'estimation précise des paramètres d'état. Cette économie de capacité calculatoire, essentiellement due à la stratégie déterministe d'exploration de l'espace d'état, garantit la faisabilité d'une application non seulement efficace mais aussi peu coûteuse.

Par ailleurs, la comparaison à performances quasi-égales de la technique particulière déterministe à celle, plus classique, basée sur une exploration par tirage aléatoire, confirme la réduction drastique de la complexité algorithmique que permettent les particules déterministes. En effet, le nombre de particules  $N'$  nécessaire pour la technique aléatoire est proportionnel au carré de celui de la technique déterministe  $N$  ( $N' \propto N^2$ ). Cet ordre de grandeur obtenu par expérimentation est conforme à l'économie attendue, donnée par les propriétés de convergence<sup>1</sup> des deux approximations.

---

<sup>1</sup>en  $\frac{1}{N}$  pour le cas déterministe contre  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  pour le cas aléatoire



# Conclusion Générale



Les recherches menées dans nos travaux concernent la résolution du problème de filtrage non-linéaire par les techniques particulières. La solution proposée y est étudiée tant sur le plan théorique que sur le plan pratique. La validation pratique de la technique est obtenue à travers deux problèmes de localisation sous conditions critiques : Radar et GPS.

Parmi les différentes techniques de filtrage existantes, le filtre proposé se classe dans la famille des filtres particuliers non aléatoires. Il est important de rappeler, à cet effet, que, d'une part l'opération de filtrage optimal<sup>2</sup> est entièrement déterministe, les aléas ne portant que sur le processus estimé et non sur son estimation, et que, d'autre part, l'essentiel de l'approche particulière réside dans l'interprétation des poids comme des probabilités de survie des particules qu'ils représentent et non dans l'aspect aléatoire de la simulation des flots dynamiques du système.

Le filtre particulier dont il est question dans le présent mémoire est donc entièrement déterministe. Il est basé sur l'interprétation particulière directe du générateur des équations de filtrage non-linéaire alliée aux propriétés de convergence en  $\frac{1}{N}$  des approximations déterministes, au lieu de  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  par tirages aléatoires.

Contrairement aux maillages déterministes "naïfs" rejetés par le passé à cause de la "course à la dimension", le maillage construit par la technique particulière déterministe s'adapte à la densité de probabilité conditionnelle, en concentrant les ressources disponibles dans les régions les plus pertinentes de l'espace d'état. Il permet, ainsi, une résolution plus économe que celle apportée par les filtres particuliers aléatoires, du problème de filtrage non linéaire sans restriction particulière sur la nature des équations d'état et/ou des distributions des bruits.

Les performances de la technique particulière déterministe sont illustrées à travers deux applications essentielles.

La première concerne le traitement des signaux Radar pour des cibles fortement manœuvrantes tant pour les missions de veille que pour les missions de poursuite. La validation sur données réelles, pour le cas de poursuite, a permis de confirmer les gains en performance de l'ordre de  $-20\text{ dB}$  qu'apportait déjà la technique aléatoire, avec une économie de calcul considérable par rapport à cette dernière.

La seconde application s'intéresse à la réception des signaux bruts GPS. On y traite, d'abord, la poursuite du signal sous forte contrainte dynamique<sup>3</sup>. Le récepteur particulier proposé permet d'atteindre les performances ultimes, en terme de relèvement<sup>4</sup> du rapport  $S/B$ , qu'offre la répétition des bits du message de navigation pour leurs détections. Au delà, les résultats n'ont qu'une portée académique. On peut encore poursuivre les pseudo-distances, mais le défaut de lecture du message de navigation ne permet pas le recalage du récepteur.

Ensuite, par soucis d'exhaustivité, le problème d'acquisition est abordé sous les mêmes contraintes<sup>5</sup> de dynamique et d'observation. La modification de la chaîne d'acquisition du signal permet une application efficace du récepteur particulier déterministe sans contrainte d'informations initiales suffisantes telles que celles admises par la poursuite du signal.

---

<sup>2</sup>inaccessible en dimension finie

<sup>3</sup>Fortes accélérations imprévisibles

<sup>4</sup> $RSB \simeq -7\text{ dB}$  relevé à  $\sim 0\text{ dB}$  par la répétition 20 fois de chaque bit du message de navigation.

<sup>5</sup>inaccessibles aux techniques classiques



Citons, enfin, sans prétention d'exhaustivité quelques perspectives de travail qui permettent de compléter nos contributions actuelles :

- D'abord, pour l'application Radar, il s'agit de continuer la campagne d'évaluation sur données réelles des performances du filtre à particules déterministes de Gauss, déjà initiée en partenariat avec Thalès Air Défense, sous la tutelle de la DGA, et dont une partie des résultats obtenus est reportée dans ce mémoire. En effet, outre la campagne J11 citée dans ce rapport, une campagne ARMOR a commencé dès 2005. Ses premiers résultats montrent, encore une fois, les gains en performance apportés par la technique particulière déterministe dans l'application Radar, et ne laissent aucun doute sur l'intérêt de la poursuite de cet effort d'investigation.
- Ensuite, pour l'application GPS, et dans l'attente d'une motivation industrielle et/ou militaire pour entamer des campagnes de validation sur données réelles, il s'agirait d'intégrer le problème des multi-trajets. Notons qu'à ce sujet, la recherche<sup>6</sup> réalisée au sein de l'Institut National des Télécommunications par F. Lehmann aboutit à des résultats intéressants<sup>7</sup>, dont l'intégration au récepteur particulière proposé ici permettrait d'aborder conjointement la présence de multi-trajets et de fortes dynamiques.
- Enfin, l'extension à l'estimation à minimum de variance brièvement abordée dans le présent mémoire sera plus amplement investie. En effet, une technique prometteuse de redistribution déterministe en loi est en cours d'étude. Elle permettrait d'étendre au cas multi-variables les performances, bien connues dans le cas scalaire, de la discrétisation de l'espace des probabilités<sup>8</sup> pour l'estimation à minimum de variance.

---

<sup>6</sup>non publiée encore

<sup>7</sup>Il s'agit d'une modélisation "minimale" des multi-trajets permettant, à moindre effort, d'éviter l'introduction de biais sur l'estimation du trajet direct. Modélisation proche de celle proposée dans [Bensalem 02] en télécommunications radio-mobiles.

<sup>8</sup>Par opposition au maillage de l'espace d'état considéré ici. Par ailleurs, suffisant dans le cas trajectorien.

# Bibliographie

- [Alspach 70] D.L. Alspach. *A Bayesian approximation technique for estimation and control of time-discret stochastic systems*. PhD thesis, University of California, 1970.
- [Anderson 79] B.D.O. Anderson & J.B. Moore. *Optimal filtering*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1979.
- [Anderson 84] J.B. Anderson & S. Mohan. *Sequential Coding Algorithms : A Survey and Cost Analysis*. IEEE Transactions on Communications, vol. COM-32, no. 2, pages 169–176, Feb 1984.
- [Aoki 65] M. Aoki. *Optimal Bayesian and min-max control of a class of stochastic and adaptative dynamic systems*. In Proceedings IFAC Symposium on Systems Engineering for Control System Design, pages 77–84, Tokyo, 1965.
- [Arulampalam 02] M.S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon & T. Clapp. *A Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian Tracking*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 50, no. 2, pages 241–254, Feb 2002.
- [Azimi-Sadjadi 00] B. Azimi-Sadjadi & P.S. Krishnaprasad. *Approximate nonlinear filtering and its applications for GPS*. In 39th IEEE Conference on Decision and Control, pages 1579–1584, Sydney, Australia, decembre 2000.
- [Bennis 86] O. Bennis, T. Huillet, A. Monin & G. Salut. *Modélisation, Estimation et Optimisation Non-Linéaires de Chaîne de Poursuite Radar pour Mobiles Non-Coopératifs : A - Modélisation*. Rapport technique 86200, LAAS/CNRS, 1986.
- [Bensalem 99] F. Bensalem. *Réception particulière à maximum de vraisemblance en télécommunications (BPSK)*. In JDA'99 Journées Doctorales d'Automatique, Nancy, sept 1999.
- [Bensalem 00] F. Bensalem & G. Salut. *Réception particulière à maximum de vraisemblance sans Viterbi*. In CIFA'2000, Lille, juillet 2000.
- [Bensalem 01] F. Bensalem. *Récepteur Particulaire pour Canaux Mobiles Évanescents*. In JDA'01 Journées Doctorales d'Automatique, Toulouse, sept 2001, [www.laas.fr/JDA2001](http://www.laas.fr/JDA2001).
- [Bensalem 02] F. Bensalem. *Réception particulière pour canaux multi-trajets évanescents en communications radiomobiles*. PhD thesis, Université de Paul Sabatier, 2002.
- [Boers 01] Y. Boers & J.N. Driessen. *Particle Filter based detection for tracking*. In Proceedings of the American Control Conference, pages 4393–4397, Arlington, VA, Juin 2001.
- [Boucher 04] C. Boucher, A. Lahrech & J-C. NOYER. *Non-linear filtering for land vehicule navigation with GPS outage*. In IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, pages 1321–1325, oct. 2004.

- [Braasch 99] M.S. Braasch & A.J. van Dierendonck. *GPS receiver architectures and measurements*. In Proceedings of the IEEE, pages 48–64, Janvier 1999.
- [Briers 04] M. Briers, A. Doucet & S. Maskell. *Smoothing Algorithms for State-Space Models*. Rapport technique CUED/F-INFENG/TR.498, Departement of Engineering, University of Cambridge, August 2004.
- [Bucy 71] R.S. Bucy & K.D. Senne. *Digital synthesis of non linear filters*. Automatica, vol. 7, pages 287–298, 1971.
- [Bucy 73] R.S. Bucy, C. Hecht & K.D. Senne. *New methods for non linear filtering*. Revue Française d’Automatique, vol. 1, pages 3–54, 1973.
- [Cameron 68] A.V. Cameron. *Control and estimation of linear sytems with nongaussian a priori distributions*. In Proceedings of the Third Annual Conference on Circuit and System Science, 1968.
- [Carvalho 95] H. Carvalho. *Filtrage optimal non-linéaire du signal GPS NAVSTAR en recalage de centrales inertielles*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace - Toulouse, 1995.
- [Casella 96] G. Casella & C. Robert. *Rao-Blackwellisation of sampling schemes*. Biomtrika, vol. 83, no. 1, pages 81–94, 1996.
- [Chamon 96] M.A. Chamon. *Filtrage particulaire et ouverture synthétique inverse sur cibles radar non-coopératives*. PhD thesis, École Nationale Supérieur de l’Aéronautique et de l’Espace, 1996.
- [Chen 00] R. Chen & J. Liu. *Mixture Kalman filters*. Journal of the Royal Statical Society, vol. 62, no. 3, pages 493–508, 2000.
- [Chevalier 89] F. Le Chevalier. *Principes de traitement des signaux radar et sonar*. Masson, 1989.
- [Cook 93] C.E. Cook & M. Bernfeld. *Radar signals : An introduction to theory and application*. ARTECH HOUSE, 1993.
- [Crisan 02] D. Crisan & A. Doucet. *A survey of convergence results on particle filtering methods for practitioners*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 50, no. 3, pages 736–746, 2002.
- [Darricau 93] J. Darricau. *Physique et théorie du radar*. Éditeur SODIPE, 1993.
- [Daum 03] F. Daum & J. Huang. *Curse of Dimensionality and Particle Filters*. In Aerospace Conference, pages 1979–1993, 8-15 Mars 2003.
- [Devroye 86] L. Devroye. *Non-uniform random variate generation*. Springer-Verlag, 1986.
- [Finucan 64] H.M. Finucan. *The mode of a multinomial distribution*. Biometrika, vol. 51, pages 513–517, 1964.
- [Fourney 73] G.D. Fourney. *The Viterbi algorithm*. Proceedings of the IEEE, vol. 61, pages 268–278, March 1973.
- [Fuxjaeger 91] A.W. Fuxjaeger & R.A. Iltis. *Spread Spectrum Code, Doppler, and Multipath Tracking Using Gaussian Sum Filtering*. In ASILOMAR Conference on Signals, Systems and Communication, pages 143–147, 1991.
- [Gall 00] F. Le Gall & G. Salut. *Algorithme modal d’affectation multinomiale dans l’estimation particulaire*. In CIFA’2000, Lille, juillet 2000.
- [Gordon 93] N J. Gordon, D J. Salmond & AFM Smith. *Novel approach to non-linear/non-Gaussian bayesian state estimation*. In IEE-Proceedings-F, volume 140, pages 107–113, 1993.

- [Gustafsson 02] F. Gustafsson, F. Gunnarsson, N. Bergman, U. Forssell, J. Jansson, R. Karlsson & P.J. Nordlund. *Particle Filters for Positioning, Navigation and Tracking*. In IEEE Transactions on Signal Processing, pages 425–437, Février 2002.
- [Handschin 69] J. Handschin & D. Mayne. *Monte-Carlo techniques to estimate the conditionnal expectation in multi-stage non-linear filtering*. Int. J. Control, pages 547–559, 1969.
- [Handschin 70] J. Handschin. *Monte-Carlo techniques for prediction and filtering of non-linear stochastic processes*. Automatica, pages 555–563, 1970.
- [Hardange 95] J.P. Hardange, P.H. Lacomme & J.C. Marchais. Radars aéroportés et spatiaux. Masson, 1995.
- [Hue 02] C. Hue, J-P. Le Cadre & P. Pérez. *Tracking multiple objects with particle filtering*. In IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, pages 791–812, july 2002.
- [Huillet 89] T. Huillet & G. Salut. *Interprétation des équations du filtrage non-linéaire*. In Séance du GdR Automatique du CNRS (Pôle non linéaire), Paris, 6-8 nov 1989.
- [Jazwinski 70] A.H. Jazwinski. Stochastic processes and filtering theory. Academic Press, 1970.
- [Johansson 98] F. Johansson, R. Mollaei, J. Thor & J. Uusitalo. *GPS Satellite Signal Acquisition and Tracking*. Rapport technique, Division of Signal Processing, Luleå University of Technology, Suède, Aout 1998.
- [Julier 81] S.J. Julier, J.K. Uhlmann & H.F. Durrant-Whyte. *A new Approach for Filtering Nonlinear Systems*. In The Proceedings of The American Control Conference, pages 1628–1632, Seattle, Washington, June 1981.
- [Kalman 60] R.E. Kalman. *A new approach to linear filtering and prediction problems*. Transaction AMSE, Journal of Basic Engineering, vol. 82, pages 33–45, 1960.
- [Kalman 61] R.E. Kalman & R.S. Bucy. *New results in linear filtering and prediction theory*. Transaction AMSE, Journal of Basic Engineering, vol. 83, pages 95–108, 1961.
- [Kaplan 96] E.D. Kaplan. Understanding gps : principles and applications. Artech House, 1996.
- [Karlsson 04] R. Karlsson, T. Schön & F. Gustafsson. *Complexity Analysis of the Marginalized Particle Filter*. Rapport technique LiTH-ISY-R-2611, Control & Communication, Departement of Electrical Engineering, Linköping University, Sweden, 2004.
- [Kazem re] A. Kazem. *Particules déterministes généralisées en automatique et traitement du signal*. PhD thesis, Université Paul Sabatier - Toulouse, A paraître.
- [Kitagawa 93] G. Kitagawa. *A Monte Carlo filtering and smoothing method for non-gaussian non-linear state space models*. In 2nd US-Japan Joint Seminar of Statical Time-Series Analysis, 1993.
- [Kitagawa 96] G. Kitagawa. *Monte Carlo filter and smoother for non-gaussian non-linear state space models*. Journal of Computational and Graphical Statistics, vol. 5, no. 1, pages 1–25, 1996.
- [Kokkonen 02] M. Kokkonen & S. Pietila. *A New Bit Synchronization Method for a GPS Receiver*. In Positioning Location and Navigation Symposium, 2002 IEEE, pages 85–90, 2002.

- [Kotecha 03] J.H. Kotecha & P.M. Djurić. *Gaussian sum particle filtering*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 51, pages 2603–2613, oct 2003.
- [Lamole 97] F. Lamole & G. Salut. *Aide à la manœuvre de véhicules sous-marins par résolution particulière*. Rapport technique 97515, LAAS, 1997.
- [Lamole 00] F. Lamole. *Commande particulière optimale - Application à l'optimisation de missions de lutte sous-marine*. PhD thesis, Université Paul Sabatier - LAAS/CNRS, 2000.
- [Larson 66] R.E. Larson & J. Peschon. *A dynamic programming approach to trajectory estimation*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-11, pages 537–540, July 1966.
- [Lehmann 04] F. Lehmann & G. Salut. *Turbo Equalization with Particle Filter Channel Estimation*. In International Symposium on Information Theory and its Applications, Parme, 10-13, Octobre 2004.
- [Liu 95] J.S. Liu & R. Chen. *Blind deconvolution via sequential imputations*. Journal of the American Statistical Association, vol. 430, pages 567–576, 1995.
- [Lo 69] J.T. Lo. *Finite dimensional sensor orbits and optimal nonlinear filtering*. In University of South California, Report USCAE 114, August 1969.
- [Monin 93] A. Monin & G. Salut. *Filtrage optimal de Volterra à horizon infini : application aux systèmes bilinéaires*. In 14ème colloque de GRETSI, Juan-Les-Pins, 13-16 Septembre 1993.
- [Monin 95] A. Monin. *Traitement du signal LORAN par estimation dynamique non-linéaire*. Rapport technique 2, Contrat DCN/STERIA/LAAS A 94.75.106, 1995.
- [Moral 91] P. Del Moral, G. Rigal & G. Salut. *Particules aléatoires et filtrage non-linéaire*. Rapport technique, Séance du GdR Automatique (pôle non linéaire), 1991.
- [Moral 94a] P. Del Moral. *Résolution particulière des problèmes d'estimation et d'optimisation non-linéaires*. PhD thesis, Université Paul Sabatier - Toulouse, 1994.
- [Moral 94b] P. Del Moral, J.C. Noyer & G. Salut. *Maslov Optimisation Theory : Stochastic Interpretation, Particle Resolution*. In 11ème Conférence Internationale sur l'Analyse et l'Optimisation des Systèmes, Ecole des mines Sophia-Antipolis, France, 15-16-17 Jun 1994. Lecture Note in Control and Information Sciences 199, Springer-Verlag.
- [Moral 94c] P. Del Moral, J.C. Noyer & G. Salut. *Non-linear filtering using random particles. Part I : Weighted Monte-Carlo sampling*. Rapport technique 94208, LAAS/CNRS, 1994.
- [Moral 94d] P. Del Moral, G. Rigal & G. Salut. *Non-linear filtering using random particles. Part II : Weighted conditional sampling*. Rapport technique 94209, LAAS/CNRS, 1994.
- [Moral 94e] P. Del Moral & G. Salut. *Non-linear filtering using random particles. Part III : Continuous-time particles*. Rapport technique 94210, LAAS/CNRS, 1994.
- [Moral 99] P. Del Moral & A. Guionnet. *Central limit theorem for nonlinear filtering and interacting particle systems*. In The Annals of Applied Probability, pages 257–297, 1999.
- [Morell 91] D.R. Morell & R.D. Martin. *Implimentation of a continuous-state Viterbi algorithm for MAP state estimation*. In Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, November 1991.

- [Musso 98] C. Musso & N. Oudjane. *Regularisation schemes for branching particle systems as a numerical solving method for the nonlinear filtering problem*. In The Irish Signals Systems Conference, Dublin, 1998.
- [Neyme 04] F. Neyme, C. Adnet & D. Muller. *Particle Filtering for TBD in a Radar context*. In International Conference on Radar Systems, Toulouse, Octobre 2004.
- [Noyer 92] J.C. Noyer. *Résolution particulière en filtrage non-linéaire*. Mémoire de DEA, DEA de Physique des particules, physique mathématique et modélisation. Universités d'Aix-Marseille I,II, Nice, Toulon, Toulouse, juin 1992.
- [Noyer 96] J.C. Noyer. *Traitement non-linéaire du signal RADAR par filtrage particulière*. PhD thesis, Université Paul Sabatier - Toulouse, 1996.
- [Noyer 00] J.C. Noyer & G. Rigal. *Evaluation expérimentale sur données réelles des techniques particulières*. Rapport technique 1, Contrat DCAN/STERIA-Diginext A 94.77.717, 2000.
- [Oudjane 99] N. Oudjane & C. Musso. *Multiple model particle filter*. In 17ème colloque GRETSI, pages 681–684, Vannes, 1999.
- [Oudjane 00] N. Oudjane. *Satbilité et approximations particulières en filtrage non-linéaire, Application au pistage*. PhD thesis, Université de Rennes 1 - Rennes, 2000.
- [Parkinson 96] B.W. Parkinson & J.J. Spikler Jr. *Global positioning system : Theory and applications*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996.
- [Psiaki 01] M.L. Psiaki. *Smoother-Based GPS Signal Tracking in a Software Receiver*. In 14th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS 2001), pages 2900–2913, Salt Lake City, 11-14 Septembre 2001.
- [Punskaya 01] E. Punskaya, C. Andrieu, A. Doucet & B. Fitzgerald. *Particle filtering for demodulation in fading channels with non-gaussian additive noise*. IEEE Transactions on Communications, no. 49, pages 579–582, 2001.
- [Rigal 92a] G. Rigal. *La résolution particulière en estimation filtrage. Résultats expérimentaux. Partie C*. Rapport technique 2, Contrat DIGILOG/DGA 89.34.553 (20/12/1990), 1992.
- [Rigal 92b] G. Rigal & G. Salut. *L'estimation particulière dans les problèmes non-linéaires généraux*. In Séance du G.D.R. Traitement du signal, Paris, Oct 1992.
- [Rigal 93] G. Rigal. *Filtrage non-linéaire, résolution particulière et applications su traitement du signal*. PhD thesis, Université Paul Sabatier - Toulouse, 1993.
- [Rigal 95] G. Rigal. *Poursuite de cibles manoeuvrantes par une méthode de filtrage particulière*. Rapport technique 1, Contrat DCN/DIGILOG/LAAS A 94.77.773, 1995.
- [Salut 81] G. Salut. *Filtrage non-linéaire et projections réalisables*. In R.C.P. 567 : Outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse des système et le traitement du signal : Filtrage non-linéaire, pages 61–84, Toulouse, Mars 1981.
- [Salut 89] G. Salut. *Le thème non-linéaire en automatique et traitement du signal*. In Conférence invitée, Journées Nationales du GdR "Traitement du signal et images", Chantilly, 25-27 sept 1989.
- [Salut 92] G. Salut. *La résolution particulière en estimation filtrage. Résultats expérimentaux. Partie A*. Rapport technique 2, Contrat DIGILOG/DGA 89.34.553 (20/12/1990), 13 janvier 1992.



- [Salut 94] G. Salut. Procédé et système pour l'estimation non-linéaire optimale des processus dynamiques en temps-réel. Brevet INPI : 94/07274 (Extensions : Europe 95595256.5-5.2206, US patent 5933352), 6 juin 1994.
- [Salut 01] G. Salut. Récepteur particulière pour l'estimation optimale conjointe de l'information digitale et continue dans les signaux à modulation pulsée. Brevet INPI :01/00849, jan 2001.
- [Salut 04] G. Salut & A. Ziadi. *Maximum Likelihood Non-Linear Filtering Using Deterministic Gaussian Particles*. In International Symposium on Information Theory and its Applications, Parme, 10-13, Octobre 2004.
- [Sorenson 71] H.W. Sorenson & D.L. Alspach. *Recursive Bayesian Estimation Using Gaussian Sums*. Automatica, vol. 7, pages 465–479, 1971.
- [Stratonovitch 60a] R.L. Stratonovitch. *Application of the theory of Markoff processes in optimal signal discrimination*. Radio Engineering and Electronic Physics, vol. 5, no. 11, pages 1–19, 1960.
- [Stratonovitch 60b] R.L. Stratonovitch. *Conditionnal Markov processes*. The Probability and Its Applications, vol. 5, no. 2, pages 156–178, 1960.
- [Teulière 99] V. Teulière, A. Monin & G. Salut. *Trajectographie passive SONAR par estimation à maximum de vraisemblance*. In GRETSI'99, pages 705–708, Vannes, Sept 1999.
- [Teuliere 00] V. Teuliere. *Contribution au filtrage de Volterra et à l'estimation particulière, application aux transmissions électroniques et acoustiques*. PhD thesis, Université Paul Sabatier - Toulouse, 2000.
- [van der Merwe 00] R. van der Merwe, A. Doucet, J.F.G. de Freitas & E. Wan. *The unscented particle filter*. Rapport technique CUED/F-INFENG/TR.380, Signal Processing Group, Departement of Engineering, University of Cambridge, 2000.
- [Zaritskii 75] V. Zaritskii, V. Svetnik & L. Shimelevich. *Monte-Carlo techniques in problems of optimal data processing*. Automatic and Remote Control, pages 95–103, 1975.
- [Ziadi 01] A. Ziadi. *Filtre à particules étendues gaussiennes pour le signal GPS*. In JDA'01 Journées Doctorales d'Automatique, Toulouse, sept 2001, [www.laas.fr/JDA2001](http://www.laas.fr/JDA2001).
- [Ziadi 05] A. Ziadi & G. Salut. *Non-overlapping Deterministic Gaussian Particles in Maximum Likelihood Non-Linear Filtering, Phase Tracking Application*. In International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communications Systems, Hong Kong, 14-17, Decembre 2005.







# Particules Gaussiennes Déterministes en Maximum de Vraisemblance Non-Linéaire Application au Filtrage Optimal des Signaux Radar et GPS

## Résumé

Le filtre particulaire “aléatoire”, bien connu aujourd’hui, est basé sur une interprétation par processus de branchement du générateur de filtrage non-linéaire. Sa généralité permet d’aborder tout problème d’estimation dynamique sans restriction concernant la nature des équations d’état ou des densités de probabilité.

Cette technique procède par simulation numérique aléatoire des flots du système dynamique au moyen de particules de Dirac, corrigées par les observations et adaptées à l’évolution des connaissances a posteriori de l’état.

Des évolutions successives de ce procédé ont montré l’intérêt des particules gaussiennes étendues pour la réduction du coût algorithmique et l’amélioration des performances du filtre. D’autre part, la supériorité du branchement/sélection déterministe s’est manifestée dans le cas de bruit source à valeurs discrètes, notamment pour l’estimation au sens du maximum de vraisemblance.

Ce mémoire étend l’utilisation des particules déterministes de Gauss, principalement pour le maximum de vraisemblance, au cas général comprenant les bruits de dynamique continus.

Il dote la technique particulaire “déterministe” d’une procédure optimisant le maillage particulaire de l’espace des bruits, ainsi que d’une contrainte de “non-recouvrement” des particules étendues assurant l’économie maximale.

Une synthèse des principales variantes du filtrage particulaire, permettant d’établir un état des lieux de ces techniques, de leurs différences et points communs, y est proposée sans prétention d’exhaustivité.

Concernant l’efficacité applicative, un récepteur particulaire “déterministe” des signaux radar, est proposé pour la détection/poursuite de cibles fortement manœuvrantes sous faible observation. Les performances de ce récepteur sont, d’abord illustrées par des simulations réalistes, puis comparées, sur données réelles issues d’expérimentations militaires, à celles du filtre à particule aléatoires de Dirac.

La seconde application concerne le positionnement GPS de récepteur à forte dynamique. Elle aborde l’estimation optimale conjointe des paramètres cinématiques relatifs du récepteur et la détection du message binaire transmis par un satellite. En sus des architectures classiques de la chaîne d’acquisition du signal, on y met en évidence une architecture d’acquisition conjointe Doppler-décodage dans le cas de forte dynamique et de rapport signal/bruit faible.

# Deterministic Gaussian Particles in Non-Linear Maximum Likelihood Estimation

## Application to optimal Filtering of Radar and GPS Signals

### Abstract

Particle filter is now a well-known numeric solution for the non-linear estimation problem. Based on a reinterpretation of Stratonovich non-linear filtering equation as the generator of branching process, it provides a general finite-dimensional solution to the non-linear filtering problem.

Previous improvement of the method point out, in one hand, the benefit of gaussian particles for the state space dynamic representation, and in the other one, the economy of the deterministic sampling, specially in the maximum likelihood case.

We therefore present here a maximum likelihood deterministic particle filter generalized to the continuous state space case, using extended Gauss particles. This particle filter was completed with optimization steps, such as non-overlapping selection to guarantee optimal use of computational resources.

Besides deterministic particle filter description first part of this report present a “non-exhaustive” survey of non-linear filtering methods and particular “Random” particles ones.

High performances of the proposed filtering method is illustrated through two applications of interest:

- Radar detection and tracking of manoeuvring target: where performances are studied, until real data provided by military experimentations, and compared to “random” particles ones.
- GPS receiver: where tracking problem is firstly addressed under high dynamic noises. Then acquisition one is solved with similar dynamics constraints by a modified signal processing structure.